# IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
## 3. Stufe (Bezirksolympiade)
## Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

9;1. Es sei ABCDEFGH ein regelmäßiges Achteck. Man denke sich alle Dreiecke gebildet, deren Ecken je drei der Punkte A, B, C, D, E, F, G, H sind. Jemand will nun einige dieser Dreiecke aufschreiben, und zwar so, daß keine zwei der aufgeschriebenen Dreiecke einander kongruent sind.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die er unter dieser Bedingung aufschreiben kann!

9;2. Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $s_a = 9,6$ cm, $s_b = 12,6$ cm und $s_c = 11,1$ cm!
Dabei sind $s_a$, $s_b$ und $s_c$ die Längen der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks.
Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

9;3. Für eine bestimmte Arbeit benötigt A eine genau m mal so lange Zeit wie B und C zusammen; B benötigt genau n mal so lange wie C und A zusammen und C genau p mal so lange wie A und B zusammen.
Berechnen Sie p in Abhängigkeit von m und n !

# IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
## 3. Stufe (Bezirksolympiade)
## Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

9;4. Beweisen Sie: Wenn zwei ganze Zahlen a und b die Bedingung erfüllen, daß die Zahl $11a + 2b$ durch 19 teilbar ist, dann ist auch die Zahl $18a + 5b$ durch 19 teilbar.

9;5. Die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ werde durch eine Parallele zur Seite AB in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Ermitteln Sie das Verhältnis, in dem die zur Seite AB gehörende Höhe des Dreiecks durch die Parallele geteilt wird!

9;6. Es sei $f(x)$ die für alle reellen x definierte Funktion $f(x) = \frac{(x-1)x}{2}$. Ferner sei $x_0$ eine beliebig gegebene von 0 verschiedene reelle Zahl.
Wie üblich seien die Funktionswerte der Funktion $f(x)$ an den Stellen $x_0 + 1$ und $x_0 + 2$ mit $f(x_0 + 1)$ bzw. mit $f(x_0 + 2)$ bezeichnet.
Beweisen Sie, daß dann $f(x_0 + 2) = \frac{(x_0 + 2) \cdot f(x_0 + 1)}{x_0}$ gilt!

# IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
## 3. Stufe (Bezirksolympiade)
## Lösungen und Punktbewertung
## Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe

9;1. Lösung: 6 Punkte

Jedes Dreieck, dessen Ecken drei der Punkte A, B, C, D, E, F, G, H sind, ist kongruent zu (mindestens) einem der Dreiecke, unter deren Ecken der Punkt A auftritt. Die letztgenannten Dreiecke sind genau die folgenden:

$\triangle$ ABC, $\triangle$ ABD, $\triangle$ ABE, $\triangle$ ABF, $\triangle$ ABG, $\triangle$ ABH,
$\triangle$ ACD, $\triangle$ ACE, $\triangle$ ACF, $\triangle$ ACG, $\triangle$ ACH,
$\triangle$ ADE, $\triangle$ ADF, $\triangle$ ADG, $\triangle$ ADH,
$\triangle$ AEF, $\triangle$ AEG, $\triangle$ AEH,
$\triangle$ AFG, $\triangle$ AFH,
$\triangle$ AGH.

Zwischen diesen Dreiecken bestehen genau die folgenden Kongruenzbeziehungen:

(1) $\triangle$ ABC = $\triangle$ ABH = $\triangle$ AGH,
(2) $\triangle$ ABD = $\triangle$ ABG = $\triangle$ ACD = $\triangle$ ACH = $\triangle$ AFG = $\triangle$ AFH,
(3) $\triangle$ ABE = $\triangle$ ABF = $\triangle$ ADE = $\triangle$ ADH = $\triangle$ AEF = $\triangle$ AEH,
(4) $\triangle$ ACE = $\triangle$ ACG = $\triangle$ AEG,
(5) $\triangle$ ACF = $\triangle$ ADF = $\triangle$ ADG.

Das in der Aufgabenstellung genannte Aufschreiben von Dreiecken ist daher nur so möglich, daß aus jeder der Zeilen (1) bis (5) höchstens ein Dreieck aufgeschrieben wird. Die größtmögliche Anzahl aufgeschriebener Dreiecke wird erreicht, wenn aus jeder dieser Zeilen genau ein Dreieck aufgeschrieben wird.
Demnach beträgt diese größtmögliche Anzahl 5.

9;2. Lösung: 7 Punkte

I. Angenommen, $\triangle$ ABC sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Es seien D. E, F die Mittelpunkte der Seiten BC, AC bzw. AB. Dann schneiden sich die drei Seitenhalbierenden AD,

30 04 07-1

BE, CF in einem Punkt S, und es gilt
$\overline{AS} = \frac{2}{3}\, s_a$, $\overline{SE} = \frac{1}{3}\, s_b$ sowie $\overline{SF} = \frac{1}{3}\, s_c$.

Ferner sei G der Mittelpunkt von AS; dann gilt
$\overline{GS} = \frac{1}{3}\, s_a$
und $\overline{AG} : \overline{AS} = \overline{AF} : \overline{AB}$, also nach der Umkehrung des einen Strahlensatzes
$GF \parallel SB$,
ebenso auch
$\overline{AG} : \overline{AS} = \overline{AE} : \overline{AC}$, also analog
$GE \parallel SC$.
Daher ist GFSE ein Parallelogramm und folglich
$\overline{GF} = \frac{1}{3}\, s_b$.

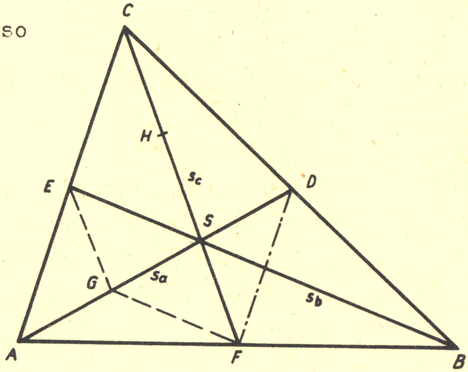


Abb. L 9;2

II. Hieraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle$ ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
Man zeichne eine Strecke GS der Länge $\frac{1}{3}\, s_a$.
Schneiden sich nun der Kreis um G mit dem Radius $\frac{1}{3}\, s_b$ und der Kreis um S mit dem Radius $\frac{1}{3}\, s_c$, so sei F einer ihrer Schnittpunkte. Sodann verlängere man
die Strecke SG über G hinaus um ihre eigene Länge bis zum Punkt A,
die Strecke GS über S hinaus um ihre eigene Länge bis zum Punkt D,
die Strecke FS über S hinaus um das Doppelte ihrer eigenen Länge bis zum Punkt C.
Schneiden sich schließlich die Verlängerungen der Strecken CD und AF über D bzw. F hinaus, so sei B ihr Schnittpunkt.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion wird

$$\overline{AD} = 3\,\overline{GS} = s_a,\ \overline{CF} = 3\,\overline{SF} = s_c$$

sowie $\overline{SD} : \overline{SA} = \overline{SF} : \overline{SC} = 1 : 2$, also $DF \parallel AC$ und $\overline{DF} : \overline{AC} = 1 : 2$. Hieraus folgt $\overline{BF} : \overline{BA} = 1 : 2$ und $\overline{BD} : \overline{BC} = 1 : 2$, also ist

CF Seitenhalbierende im $\triangle$ ABC und

AD Seitenhalbierende im $\triangle$ ABC.

Der Schnittpunkt von AC mit der Verlängerung von BS über S hinaus werde mit E bezeichnet.

Dann ist BE Seitenhalbierende im $\triangle$ABC, und für sie gilt $\overline{BS} = \frac{2}{3}\,\overline{BE}$. Andererseits gilt (nach Konstruktion und da F schon als Mittelpunkt von AB nachgewiesen ist)

$\overline{AG} : \overline{AS} = \overline{AF} : \overline{AB} = 1 : 2$, also

$FG \parallel BS$ und $\overline{FG} : \overline{BS} = 1 : 2$, und hieraus schließlich erhält man

$\frac{2}{3}\,\overline{BE} = \overline{BS} = 2\,\overline{FG} = \frac{2}{3}\,s_b$, also $\overline{BE} = s_b$.

IV. Da die drei gegebenen Längen $s_a$, $s_b$, $s_c$ die Ungleichungen

$$(*)\quad s_a + s_b > s_c,\ s_a + s_c > s_b,\ s_b + s_c > s_a$$

erfüllen und folglich die entsprechenden Ungleichungen auch für $\frac{1}{3}\,s_a$, $\frac{1}{3}\,s_b$, $\frac{1}{3}\,s_c$ gelten, so ist die in II. angegebene Konstruktion von $\triangle$GFS bis auf Kongruenz eindeutig durchführbar. Die Punkte A, C, D sind dann ebenfalls eindeutig konstruierbar.

Ist schließlich H der Mittelpunkt von SC, so gilt $GF \parallel HD$, also

$\overline{\sphericalangle DCF} < \overline{\sphericalangle DHF} = \overline{\sphericalangle GFC} < \overline{\sphericalangle AFC}$, und daraus folgt, daß die Verlängerungen der Strecken CD über D und AF über F hinaus einander schneiden, so daß auch B eindeutig bestimmt ist.

Für andere gegebene Werte von $s_a$, $s_b$, $s_c$ ist ebenso die Konstruktion genau dann durchführbar (und zwar bis auf Kongruenz eindeutig), wenn diese Werte die drei Ungleichungen (*) erfüllen.

9;3. <u>Lösung:</u> 7 Punkte

Angenommen, $p$ sei eine Zahl, durch die bei gegebenem $m$ und $n$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Nach Aufgabenstellung sind $m$, $n$ und $p$ positiv.
In einer Zeiteinheit verrichte A die Arbeitsmenge $x$, B die Arbeitsmenge $y$, C die Arbeitsmenge $z$. Dabei sind auch $x$, $y$ und $z$ positiv anzunehmen.
Dann verrichtet A in $m$ Zeiteinheiten einerseits die Arbeitsmenge $mx$, andererseits nach Aufgabenstellung die Arbeitsmenge $y + z$. Daher gilt

(1) $mx = y + z$.

Ebenso erhält man

(2) $ny = x + z$,

(3) $pz = x + y$.

Aus (1), (2), (3) folgt, indem man zwei der Größen $x$, $y$, $z$ eliminiert - wobei sich herausstellt, daß die dritte eliminiert wird -, die Gleichung

(4) $(mn - 1)\,p = m + n + 2$.

Hierzu zwei Beispiele für mögliche Eliminationswege:

<u>1. Weg:</u> Aus (2) folgt $x = ny - z$; dies in (1) und (3) eingesetzt, ergibt

(5) $(mn - 1)\,y = (m + 1)\,z$ und

(6) $(p + 1)\,z = (n + 1)\,y$.

Nach Multiplikation von (5) und (6) und anschließender Division durch $yz$ (dies ist lt. Aufgabenstellung ungleich 0) ergibt sich $(mn - 1)(p + 1) = (m + 1)(n + 1)$ und daraus (4).

<u>2. Weg:</u> Multiplikation von (1) mit $(n + 1)$ ergibt
$mnx + mx = ny + nz + y + z$,
Multiplikation von (2) mit $(m + 1)$ ergibt
$mny + ny = mx + mz + x + z$,
Multiplikation von (3) mit $(mn - 1)$ ergibt
$mnpz - pz = mnx + mny - x - y$.

Nach Addition der drei erhaltenen Gleichungen und Division durch $z$ ($\neq 0$) folgt (4).

Aus (4) folgt wegen $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$, daß $mn - 1 > 0$ ist. Daher kann die gesuchte Abhängigkeit nur

$$(7)\quad p = \frac{m + n + 2}{mn - 1}$$

lauten.
Umgekehrt kann von (1), (2), (7) auf (1), (2), (3) geschlossen werden, und daher erfüllt (7) in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe.
Ein Beispiel für eine mögliche Durchführung des Schlusses von (1), (2), (7) auf (1), (2),(3):

Aus (7) folgt $mn - 1 \neq 0$ sowie (4) und daraus

$$(mn - 1)\, pz = (nz + z) + (mz + z)$$

Unter Verwendung der mit $(n + 1)$ multiplizierten Gleichung (1) und der mit $(m + 1)$ multiplizierten Gleichung (2) folgt weiter

$$\begin{aligned}(mn - 1)\, pz &= (mnx + mx - ny - y) + (mny + ny - mx - x)\\ &= (mn - 1)\,(x + y),\end{aligned}$$

also schließlich (3).

# IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

9;4. Lösung: 6 Punkte

Es gibt mehrere Möglichkeiten für Lösungswege. Gruppen solcher Möglichkeiten entsprechen den Eliminationsverfahren bei linearen Gleichungssystemen. Als Beispiel für ein Vorgehen, das dem Einsetzungsverfahren entspricht, diene der

1. Lösungsweg:

Ist $11a + 2b$ durch 19 teilbar, so ist $2b = 19k - 11a$ mit einer ganzen Zahl k, also

(1) $2 \cdot (18a + 5b) = 36a + 5 \cdot (19k - 11a) = 19 \cdot (5k - a)$.

Daher ist einerseits $5k - a$ gerade, d. h. $5k - a = 2n$ mit einer ganzen Zahl n, andererseits folgt dann aus (1) weiter $18a + 5b = 19n$, w.z.b.w.

Eine andere Gruppe von Möglichkeiten besteht darin, durch Bildung ganzzahliger Vielfacher von einem der beiden Summanden $11a$, $2b$ bis auf ein Vielfaches von 19 den entsprechenden Summanden $18a$ bzw. $5b$ der anderen Summe zu erreichen. Soll z. B. $m \cdot 2b$ (m ganz) die Form $(19p + 5)b$ (p ganz) erhalten, so muß $19p + 5$ gerade, also p ungerade gewählt werden. Man bildet dann $m \cdot (11a + 2b)$ und stellt fest, daß sich dieser Ausdruck von $18a + 5b$ nur um ein Vielfaches von 19 unterscheidet. Als Beispiel für diese Gruppe von Möglichkeiten wählen wir $p = 1$ und erhalten mit $m = 12$ den

2. Lösungsweg:

Ist $11a + 2b$ durch 19 teilbar, so auch

$12 \cdot (11a + 2b) - 19 \cdot (6a + b) = 18a + 5b$, w.z.b.w.

9;5. Lösung: 7 Punkte

Es bezeichne $h_1$ die Länge der Höhe des Teildreiecks, das die Parallele vom gesamten Dreieck abschneidet, und zwar die zu dieser Parallelen senkrechte Höhe. Die Länge des anderen Abschnitts auf der zur Seite AB gehörenden Höhe sei $h_2$ genannt.

Dann sind $(h_1 + h_2)$ und $h_1$ die Längen entsprechender Seiten in zwei ähnlichen Dreiecken vom Flächenverhältnis 2 : 1. Daher gilt $(h_1 + h_2)^2 : h_1^2 = 2 : 1$, also $\frac{h_1 + h_2}{h_1} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, woraus sich durch Subtrahieren von 1 das gesuchte Verhältnis

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{1}$$

ergibt.

9;6. Lösung: 7 Punkte

Aus den Voraussetzungen folgt

$$\frac{(x_0 + 2) \cdot f(x_0 + 1)}{x_0} = \frac{(x_0 + 2) \cdot x_0(x_0 + 1)}{x_0 \cdot 2} =$$

$$\frac{(x_0 + 1)\,(x_0 + 2)}{2} = f\,(x_0 + 2),$$

w.z.b.w.