A 9

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnung, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

9;1) Bei einem Klassenfest stellen die Schüler ihrem Mathematiklehrer die folgende Aufgabe:
Die Schüler teilen ihrem Lehrer mit, daß sie sich insgeheim so in drei Gruppen aufgeteilt haben, daß jeder Schüler der Klasse genau einer Gruppe angehört. Die Schüler der ersten Gruppe nennen sich die "Wahren", weil sie jede Frage wahrheitsgemäß beantworten. Die Schüler der zweiten Gruppe nennen sich die "Unwahren", weil sie jede Frage falsch beantworten. Die Schüler der dritten Gruppe schließlich nennen sich die "Unbeständigen", weil jeder von ihnen Serien aufeinanderfolgender Fragen alternierend (abwechselnd) wahr und falsch beantwortet; dabei ist aber ungewiß, ob er jeweils die erste Frage einer Serie wahr oder falsch beantwortet. Jeder Schüler antwortet auf eine gestellte Frage nur mit ja oder nur mit nein; Fragen, die andere Antworten erfordern, werden nicht zugelassen. Der Lehrer soll nun von einem beliebigen Schüler der Klasse durch Fragen, die er an diesen Schüler richtet und die sich nur auf die Zugehörigkeit zu einer der genannten Gruppen beziehen, feststellen, ob der Schüler ein "Wahrer", ein "Unwahrer" oder ein "Unbeständiger" ist.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Fragen, die dazu ausreicht?

b) Geben Sie eine Möglichkeit an, die Zugehörigkeit eines Schülers mit dieser kleinsten Anzahl von Fragen zu ermitteln!

9;2) Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a_1 und dem Volumen V_1 sowie ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a_2 und dem Volumen V_2. Für die Kantenlängen gelte

$$a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{2}$$

Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2$!

9;3) Jemand hat sieben Kärtchen mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7.
Man zeige, daß sich unter allen denjenigen siebenstelligen Zahlen, die unter Verwendung jeweils genau dieser sieben Kärtchen gelegt werden können (wobei ein z. B. durch Umdrehen bewirktes "Verwandeln" der 6 in eine 9 verboten ist), keine zwei befinden, deren eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist!

9;4) Es ist zu beweisen:
Verbindet man in einem Parallelogramm ABCD den Eckpunkt C mit den Mittelpunkten der Seiten AB und AD, so teilen diese Verbindungsstrecken die Diagonale BD in drei gleich lange Teilstrecken.

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

9;1) Lösung: 9 Punkte

Eine Frage reicht nicht aus, da der Lehrer wegen der Aufteilung der Schüler in drei Gruppen und wegen des Vorhandenseins nur zweier Antwortmöglichkeiten (ja, nein) auf jede beliebige (nach den Regeln zulässige) Frage von Angehörigen mindestens zweier Gruppen die gleiche Antwort erhalten würde. ("Schubfachprinzip"). Mit der Angabe des folgenden Beispiels zeigen wir gleichzeitig, daß zwei Fragen ausreichen. Der Lehrer kann z. B. die Fragen "Bist du ein "Unbeständiger"?" stellen; denn dann erhält er von einem "Wahren" die Antworten nein, nein, von einem "Unwahren" die Antworten ja, ja und von einem "Unbeständigen" die Antworten ja, nein oder nein, ja. Damit ist aber eine Identifizierung möglich.

9;2) Lösung: 8 Punkte

Es ist $V_1 = a_1^3$.

Ferner beträgt die Höhe einer Seitenfläche des Tetraeders $h = \frac{1}{2} a_2 \sqrt{3}$, die Höhe des Tetraeders $h' = \sqrt{a_2^2 - (\frac{2}{3}h)^2} = \frac{1}{3} a_2 \sqrt{6}$, der Flächeninhalt einer Seitenfläche des Tetraeders $F = \frac{1}{2} a_2 h = \frac{1}{4} a_2^2 \sqrt{3}$, also das Volumen des Tetraeders

$V_2 = \frac{1}{3} F \cdot h' = \frac{1}{12} a_2^3 \sqrt{2}$. *)

Nun ist laut Aufgabestellung $a_2 = a_1 \sqrt{2}$.

Daraus folgt $V_2 = \frac{1}{3} a_1^3 = \frac{1}{3} V_1$

Das gesuchte Verhältnis ist also $V_1 : V_2 = 3 : 1$.

*) Kann evtl. der Zahlentafel entnommen werden.

9;3) Lösung: 12 Punkte

Angenommen, es gäbe zwei solche Zahlen a und b (mit $b < a$) und es sei $a : b = n$ (n natürlich).

Dann gilt $n > 1$ sowie $1234567 \leqq a,b \leqq 7654321$, also

$$n \leqq \frac{7654321}{1234567} < 7.$$

Deshalb kann n nur eine der Zahlen 2,3,4,5 oder 6 sein.

Angenommen, es sei $n = 3$ oder $n = 6$.

Dann ergibt sich folgender Widerspruch: Einerseits ist $a = 3b$ oder $a = 6b$, also a durch 3 teilbar. Andererseits hat a die Quersumme 28, kann also nicht durch 3 teilbar sein.

Angenommen, es sei $n = 2$.

Da in b die Ziffer 4 vorkommt, müßte bei der Multiplikation der entsprechenden Stelle mit 2 in a eine 8 oder (falls der bei Multiplikation einer der Ziffern 1, ..., 7 mit 2 und eventuellem Hinzufügen eines vorangegangenen Übertrags größtmögliche Übertrag 1 hinzukommt) eine 9 entstehen, im Widerspruch dazu, daß diese Ziffern in a nicht vorkommen.

Angenommen, es sei $n = 5$.

Der bei Multiplikation einer der Ziffern 1, ..., 7 mit 5 und eventuellem Hinzufügen eines früheren Übertrags größtmögliche Übertrag ist dann 3. Da die Vielfachen von 5 auf 0 oder 5 enden, kann in a keine 4 auftreten, im Widerspruch dazu, daß a die Ziffer 4 enthält.

Angenommen, es sei $n = 4$.

Da in b eine 7 enthalten ist, müßte wegen $7 \cdot 4 = 28$ in a entweder eine 8, 9 oder 0 enthalten sein; denn der größtmögliche Übertrag aus den übrigen Stellen beträgt 2. Da in a keine dieser Ziffern auftritt, liegt auch in diesem Falle ein Widerspruch vor. Da in allen möglichen Fällen ein Widerspruch auftrat, kann es Zahlen mit der angegebenen Bedingung nicht geben.

9;4) <u>Lösung:</u> 11 Punkte

Es seien: E der Mittelpunkt der Seite AD,
F der Mittelpunkt der Seite AB,
G der Schnittpunkt der Strecken EC und BD und
H der Schnittpunkt der Strecken FC und BD.

Ferner gelte: $\overline{HB} = a$, $\overline{HG} = b$, $\overline{GD} = c$, und $\overline{BD} = d$.

Nach dem Hauptähnlichkeitssatz folgt:
$\triangle FBH \sim \triangle CHD$ (Übereinstimmung in Scheitelwinkeln und Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen).

Wegen $\overline{FB} : \overline{DC} = 1 : 2$ muß gelten $a : (b+c) = 1 : 2$

Hieraus und aus $a + (b+c) = d$ folgt $a = \frac{d}{3}$.

Nach dem Hauptähnlichkeitssatz folgt:
$\triangle EGD \sim \triangle CGB$ (wie oben).
Wegen $\overline{ED} : \overline{BC} = 1 : 2$ muß gelten $c : (a+b) = 1 : 2$,
also $c = \frac{d}{3}$.

Daraus folgt $b = d - a - c = \frac{d}{3}$.

Also gilt $a = b = c$, was zu beweisen war.

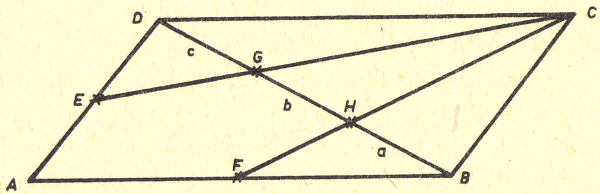

Abb. L 9;4