IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

8;1. Die Altersangaben (in vollen Lebensjahren ausgedrückt) einer Familie - Vater, Mutter und ihre zwei leiblichen Kinder - haben folgende Eigenschaften: Das Produkt aller vier Lebensalter beträgt 44950; der Vater ist 2 Jahre älter als die Mutter. Wie alt sind die vier Familienmitglieder?

8;2. Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien ähnliche Vielecke V_a, V_b, V_c konstruiert, und zwar so, daß die Dreiecksseiten BC, AC, AB jeweils einander entsprechende Seiten von V_a, V_b bzw. V_c sind.
Beweise: Der Flächeninhalt des Vielecks über der Hypothenuse ist gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Vielecke über den Katheten.

8;3. Beweise die Richtigkeit der folgenden Teilbarkeitsregel: Eine drei- oder mehrstellige natürliche Zahl ist stets dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl, vermehrt um die Hälfte der Anzahl der Einer, eine durch 4 teilbare ganze Zahl ist!
Beispiel: 37528 ist zu untersuchen
$52 + 4 = 56$ ist durch 4 teilbar, also ist 37528 durch 8 teilbar.

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

8;4. Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 vier konzentrische Kreise für deren Radien r_1, r_2, r_3 und r_4
$r_4 - r_3 = r_3 - r_2 = r_2 - r_1 = r_1$ gilt.
Ermittle das Verhältnis des Flächeninhalts von K_1 zu den Flächeninhalten der drei von K_1 und K_2 bzw. K_2 und K_3 bzw. K_3 und K_4 gebildeten Kreisringe!

8;5. Aus 77-prozentigem und 87-prozentigem Spiritus und nur daraus soll durch Mischen genau 1000 g 80-prozentiger Spiritus hergestellt werden.
Ermittle die dafür genau benötigten Massen!
(Die Prozentangaben beziehen sich auf die Massen.)

8;6. Im ebenen Gelände seien genau alle diejenigen Punkte zugänglich, die auf einem Rechteck ABCD einschließlich seines Inneren gelegen sind. In dieser Rechtecksfläche führe ein Kreisbogen von A nach B, dessen zugehöriger Mittelpunkt nicht zugänglich sei.
Auf dem Kreisbogen liege der Punkt P (mit $P \neq A$ und $P \neq B$). Konstruiere die Tangente in P an den Kreisbogen, ohne daß bei Durchführung der Konstruktion das Rechteck ABCD verlassen wird!

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

8;1. Lösung: 5 Punkte

Die Zerlegung von 44950 in Primfaktoren lautet
$44950 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31$. Daher gibt es genau die folgenden Möglichkeiten, 44950 in ein Produkt aus genau 4 natürlichen Zahlen zu zerlegen:

(1) $(2 \cdot 5) \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31 = 10 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31$,
(2) $(2 \cdot 29) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 31 = 58 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 31$,
(3) $(2 \cdot 31) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 29 = 62 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 29$,
(4) $(5 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 29 \cdot 31 = 25 \cdot 2 \cdot 29 \cdot 31$,
(5) $(5 \cdot 29) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 31 = 145 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 31$,
(6) $(5 \cdot 31) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 29 = 155 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 29$,
(7) $(29 \cdot 31) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 899 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$.

Da die Altersdifferenz der beiden Eltern 2 Jahre beträgt, können höchstens die Fälle (1) und (4) Lösung sein.
Von ihnen ist der Fall (4) nicht real; denn nach ihm müßte die 29-jährige Mutter ein 25-jähriges Kind haben. Somit verbleibt nur Möglichkeit (1); d. h. die gesuchten Altersangaben können nur

31, 29, 10, 5

sein. Umgekehrt erfüllen diese Angaben auch tatsächlich alle Bedingungen der Aufgabe.

8;2. Lösung: 8 Punkte

Wie üblich sei $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ gesetzt; AB sei die Hypothenuse von $\triangle ABC$. Die Flächeninhalte von V_a, V_b, V_c seien F_a, F_b bzw. F_c genannt.
Da nun BC und AB in den ähnlichen Vielecken V_a, V_c einander entsprechende Seiten sind, gilt

$$F_a : F_c = a^2 : c^2, \text{ also}$$

$$F_a = \frac{a^2}{c^2} F_c .$$

Ebenso erhält man

$$F_b = \frac{b^2}{c^2} F_c .$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{F_c}{c^2}$ folgt hieraus

$$\frac{a^2}{c^2} F_c + \frac{b^2}{c^2} F_c = F_c ,$$

d. h. $\qquad F_a + F_b = F_c , \qquad$ w.z.b.w.

8;3. <u>Lösung:</u> 7 Punkte

Sind a, b, c die Einer-, Zehner- bzw. Hunderterziffer einer natürlichen Zahl n, so läßt sich diese in der Form $n = 1000\,d + 100\,c + 10b + a$ mit einer ganzen Zahl d darstellen. Vermehrt man dann die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl um die Hälfte der Anzahl der Einer, so ergibt sich die Zahl $m = 10\,c + b + \frac{1}{2}\,a$.

Ist nun voraussetzungsgemäß m durch 4 teilbar, so ist $10\,c + b + \frac{1}{2}\,a = 4\,k$ mit einer ganzen Zahl k. Daraus folgt

$$20\,c + 2\,b + a = 8k,$$

also ist dann

$$n = 8k + 1000d + 80c + 8b$$
$$= 8(k + 125d + 10c + b)$$

durch 8 teilbar, w.z.b.w.

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

8;4. Lösung: 5 Punkte

Aus den Gleichungen für die Radien folgt

$$r_2 = 2\,r_1$$
$$r_3 = 3\,r_1$$
$$r_4 = 4\,r_1.$$

Der Flächeninhalt A_1 des inneren Kreises K_1 beträgt:

$$A_1 = \pi r_1^2 .$$

Der Flächeninhalt A_2 des ersten Kreisringes:

$$A_2 = \pi\left[(2\,r_1)^2 - r_1^2\right] = 3\pi\,r_1^2 .$$

Der Flächeninhalt A_3 des zweiten Kreisringes:

$$A_3 = \pi\left[(3\,r_1)^2 - (2\,r_1)^2\right] = 5\pi\,r_1^2.$$

Der Flächeninhalt des dritten Kreisringes:

$$A_4 = \pi\left[(4\,r_1)^2 - (3\,r_1)^2\right] = 7\pi\,r_1^2.$$

Daraus folgt:

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = \pi r_1{}^2 : 3\pi r_1{}^2 : 5\pi r_1{}^2 : 7\pi r_1{}^2,$$
$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = 1 : 3 : 5 : 7.$$

Die vier Flächeninhalte verhalten sich zueinander wie

$$1 : 3 : 5 : 7.$$

8;5. Lösung: 8 Punkte

Wenn es eine Lösung der Aufgabe gibt, dann sei für diese x die Maßzahl der Masse des 77-prozentigen Spiritus. Dann ist (1000-x) die Maßzahl der Masse des 87-prozentigen Spiritus, und es gilt:

$$\frac{77}{100}\,x + \frac{87}{100}\,(1000-x) = \frac{80}{100}\cdot 1000, \text{ also}$$
$$77\,x + 87000 - 87\,x = 80\,000, \text{ woraus man}$$
$$x = 700 \text{ erhält.}$$

Folglich kommen als Lösung der Aufgabe nur die Massen 700 g 77-prozentiger und 300 g 87-prozentiger Spiritus in Frage. Diese Massen haben tatsächlich die geforderte Eigenschaft; denn 700 g von 77-prozentigem Spiritus enthalten genau 539 g reinen Spiritus; 300 g von 87-prozentigem Spiritus enthalten genau 261 g reinen Spiritus. Das sind zusammen 800 g reiner Spiritus.
Laut Definition bezeichnet man 1000 g einer Mischung, die 800 g Spiritus und 200 g Wasser enthält, als 80-prozentigen Spiritus, der laut Aufgabe herzustellen war.

8;6. Lösung: 7 Punkte

Es sei o.B. d.A. $\overline{AP} \leqq \overline{BP}$. Der Kreis um P mit dem Radius $\overline{PA}$ schneidet den gegebenen Kreis außer in A in E. Wegen $\overline{AP} \leqq \overline{BP}$ ist E zugänglich, ebenso ein Stück der Winkelhalbierenden w des Winkels $\sphericalangle APE$.
Behauptung: Die Senkrechte t durch P auf w ist die gesuchte Tangente.
Beweis: Ist M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, so ist $\triangle AMP \cong \triangle EMP$ (sss), also $\sphericalangle APM \cong \sphericalangle EPM$; daher liegt M auf w.
Die gesuchte Tangente steht somit senkrecht auf w; sie fällt also mit der konstruierten Geraden t zusammen.

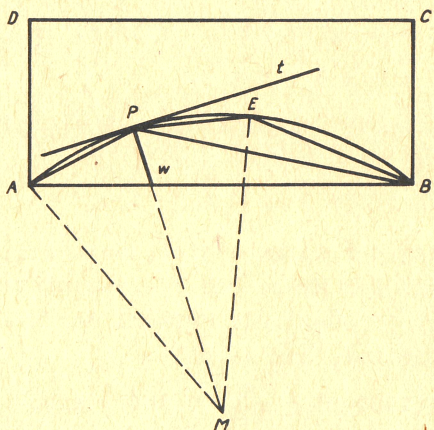

Abb. L 8;6