A 8

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnung, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

8;1) Klaus und Horst spielen mit Würfeln. Sie benutzen bei jedem Wurf genau zwei verschieden große Würfel und addieren jedesmal die beiden Augenzahlen.
Klaus meint, daß unter allen möglichen verschiedenen Würfen solche mit der Summe 7 am häufigsten auftreten. Zwei Würfe heißen dabei genau dann gleich, wenn die Augenzahlen gleich großer Würfel jeweils übereinstimmen.
Begründe die Richtigkeit dieser Meinung!

8;2) Auf einer Geraden seien die Punkte A, E, C, F, O, G, D, H, B in dieser Reihenfolge so gelegen, daß gilt:

$\overline{AB} = 6$ cm; $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FO} = \overline{OG} = \overline{GH} = \overline{HB} = 1$ cm;
$\overline{EC} = \overline{CF} = \overline{GD} = \overline{DH} = 0{,}5$ cm.

Über den Strecken AB, EH und FG seien Halbkreise in die eine Halbebene und über den Strecken AO, OB, EF und GH Halbkreise in die andere Halbebene bezüglich der Geraden durch A und B gezeichnet. Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche (Abb. A 8;2)!

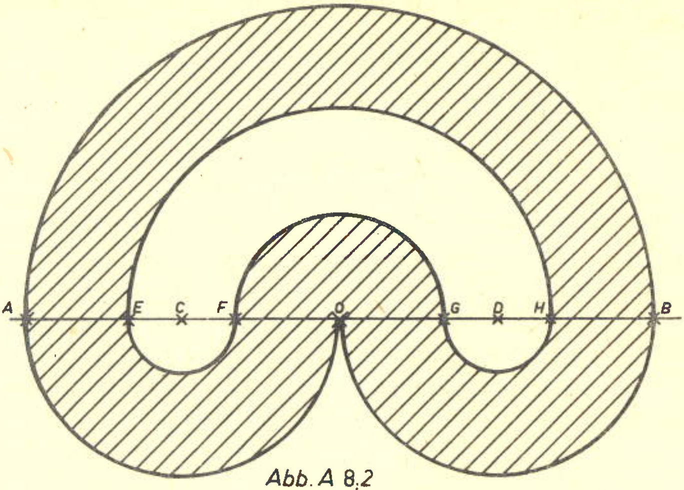

Abb. A 8,2

8;3) a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr!

8;4) Beweise folgenden Satz: In jedem Dreieck $\triangle ABC$ teilt jede Halbierende eines Innenwinkels dessen Gegenseite im Verhältnis der beiden anderen Seiten.

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

8;1) Lösung: 8 Punkte

Ordnet man z. B. die möglichen Würfe und die zugehörigen Summen der jeweiligen beiden Augenzahlen in Form nachstehender Tabelle an, so erkennt man, daß in der Tat die Summe 7 am häufigsten auftritt.

großer Würfel

kleiner Würfel	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

8;2) Lösung: 10 Punkte

Der gesuchte Flächeninhalt A ist gleich der Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über AB, FG, AO und OB vermindert um die Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über EH, EF und GH.

Wegen $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{FG} = 2$ cm, $\overline{AO} = \overline{OB} = 3$ cm, $\overline{EH} = 4$ cm, $\overline{EF} = \overline{GH} = 1$ cm gilt daher:

$$A = \frac{\pi}{8}\,(36 + 4 + 9 + 9 - 16 - 1 - 1)\ \text{cm}^2 = 5\,\pi\ \text{cm}^2$$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt $5\pi\ \text{cm}^2$, das sind angenähert 15, 71 cm^2.

8;3) **Lösung:** 12 Punkte

1. Lösungsweg

(I) Im Zeitraum von je einem Übereinanderstehen der beiden Zeiger bis zum nächsten nimmt der Winkel zwischen den Zeigern (gemessen im Uhrzeigersinn vom Stundenzeiger bis zum Minutenzeiger) alle Werte von 0° bis 360° an, jeden genau einmal. Unter diesen Zeigerstellungen befinden sich genau zwei der gesuchten, nämlich die mit den Winkeln 90° und 270°.

(II) In der Zeit von 0 Uhr bis 12 Uhr führt der Minutenzeiger genau 12 volle Umdrehungen aus, der Stundenzeiger genau eine in gleicher Richtung. Daher wird dieser Zeitraum durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens der beiden Zeiger in 11 Teile geteilt (und zwar wegen der Gleichförmigkeit der Bewegungen in gleichlange).

(III) Aus (I) und (II) folgt zunächst: Die Zeit von 0 Uhr bis 24 Uhr wird durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens in 22 Teile geteilt, und in jedem dieser Teilzeiträume befinden sich genau 2 gesuchte Zeitpunkte. Deren Gesamtzahl beträgt somit 44.

(IV) Aus (I), (II) und der Gleichförmigkeit der Bewegungen folgt ferner: Der Zeitraum von 0 Uhr bis 12 Uhr wird durch diejenigen Zeitpunkte, die den Winkeln 0°, 90°, 180°, 270° entsprechen, in 44 gleichlange Teile geteilt. Diese Zeitpunkte ergeben sich somit als die ersten 43 positiven ganzzahligen Vielfachen von $\frac{12}{44}h = \frac{3}{11}h$. Die Zeitpunkte mit den Winkeln 90° und 270° sind dabei die ungeradzahligen unter diesen Vielfachen. Von diesen liegen zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr genau diejenigen $n \cdot \frac{3}{11}h$ (n ungerade), bei denen n die Ungleichung $4 < n \cdot \frac{3}{11} < 5$ oder, gleichbedeutend hiermit, $\frac{44}{3} < n < \frac{55}{3}$ erfüllt, d. s. die Zeitpunkte

$$15 \cdot \frac{3}{11}h = 4\frac{1}{11}h = 4h\ 5\frac{5}{11}\ \text{min} \quad \text{und}$$

$$17 \cdot \frac{3}{11}h = 4\frac{7}{11}h = 4h\ 38\frac{2}{11}\ \text{min.}$$

2. Lösungsweg

(I) Um 4.00 Uhr ist der Winkel (gemessen im Uhrzeigersinn) vom Minutenzeiger zum Stundenzeiger größer als 90°, aber kleiner als 180° (also erst recht kleiner als 270°), und von da ab verringert er sich. Angenommen, um 4.00 Uhr x Minuten habe er sich (erstmalig) auf 90° verringert. Dann hat der Minutenzeiger eine Stellung x Teilstriche nach 0 eingenommen, der Stundenzeiger $(20 + \frac{x}{12})$ Teilstriche nach 0, und da ein rechter Winkel 15 Teilstrichen entspricht, ist die Annahme, der Winkel betrage 90°, gleichbedeutend mit der Gleichung $x + 15 = 20 + \frac{x}{12}$. Diese ist äquivalent mit $x = \frac{60}{11}$. Daher ist einer der in b) gesuchten Zeitpunkte 4h $5\frac{5}{11}$ min.

(II) Nach diesem Zeitpunkt verringert sich der Winkel weiter bis 0°, d. h. bis zum Übereinanderstehen der Zeiger. (Auch dies tritt noch in der Stunde zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr ein, und zwar genau einmal; denn in ihr überstreicht der Minutenzeiger zwischen 4h 20min und 4h 25min denselben Winkelraum mit gleichförmiger Geschwindigkeit wie der Stundenzeiger in der gesamten Stunde mit kleinerer gleichförmiger Geschwindigkeit.)

(III) Von da ab vergrößert sich der Winkel (gemessen im Uhrzeigersinn) vom Stundenzeiger zum Minutenzeiger. Angenommen, um 4.00 Uhr y Minuten habe er sich (erstmalig) auf 90° vergrößert. Dann ist dies analog wie in (I) gleichbedeutend mit $y - 15 = 20 + \frac{y}{12}$, und dies mit $y = \frac{420}{11}$. Daher ist ein zweiter der in b) gesuchten Zeitpunkte 4h $38\frac{2}{11}$ min.

(IV) Von diesem Zeitpunkt an vergrößert sich der Winkel weiter, bis er um 5.00 Uhr größer als 180° ist, wobei er aber immer noch kleiner als 270° bleibt. Daher sind die unter (I) und (III) gefundenen Zeitpunkte die einzigen Lösungen zu b).

(V) Durch ähnliche Überlegungen kann man nachweisen, daß es in den Stunden zwischen 0.00 Uhr und 12.00 Uhr folgende Anzahlen von Zeitpunkten mit rechtwinkliger Zeigerstellung gibt (wobei eine genauere Berechnung dieser Zeitpunkte nicht erforderlich ist):

Zeitraum	0-1	1-2	2-3 einschl.	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9 einschl.	9-10	10-11	11-12
Anzahl d. Zeitpunkte mit rechtw. Zeigerstellung	2	2	2	1	2	2	2	2	2	1	2	2

3. Weitere Lösungswege ergeben sich vor allem durch Kombination von Teilschritten des 1. und 2. Lösungsweges.

8;4) Lösung: 10 Punkte

Im Dreieck $\triangle ABC$ schneide die Halbierende des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ die Gegenseite AB im Punkt D.

(Weil eine Aussage über Streckenverhältnisse bewiesen werden soll, ist es naheliegend, das Dreieck $\triangle ABC$ mit der Winkelhalbierenden CD zu einer Strahlensatzfigur zu ergänzen:)[1]

Man konstruiere die Parallele durch B zur Winkelhalbierenden CD und verlängere AC über C hinaus. Der Schnittpunkt, der in jedem Fall existiert (denn der Winkel $\sphericalangle ACD$ ist stets kleiner als 90°), sei E (vergl. Abb. L 8;4). Nach einem der Strahlensätze gilt: $\overline{DA} : \overline{DB} = \overline{CA} : \overline{CE}$ (1)

Außerdem ist $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle CEB$ (Stufenwinkel an geschn. Parallelen)
und $\sphericalangle DCB \cong \sphericalangle CBE$, und weil (Wechselwinkel an geschn. Parallelen)
$\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle DCB$ vorausgesetzt war,
folgt $\sphericalangle CEB \cong \sphericalangle CBE$. Also ist das Dreieck $\triangle CEB$ gleichschenklig mit $\overline{CE} = \overline{CB}$.

Setzt man dies in (1) ein, so erhält man

$$\overline{DA} : \overline{DB} = \overline{CA} : \overline{CB},$$ w. z. b. w.

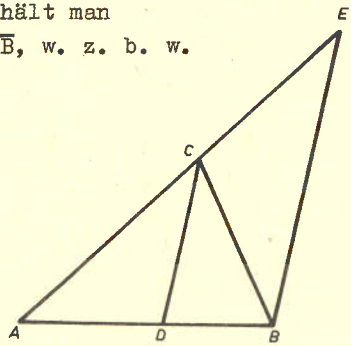

Abb. L 8,4

1) Anmerkung:
Diese Hinführung zum Beweismotiv ist nicht für einen vollständigen Lösungstext erforderlich.
Ein anderer Beweisweg besteht darin, E auf der Verlängerung von AC über C hinaus durch $\overline{CE} = \overline{CB}$ zu definieren und dann $EB \parallel CD$ zu beweisen.