A 7

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 7

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnung, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

7;1) Vater und Sohn gehen nebeneinander. In der gleichen Zeit, in der der Vater 4 Schritte macht, macht der Sohn jedesmal 5 Schritte, und in dieser Zeit legen beide jedesmal genau den gleichen Weg zurück. Die durchschnittliche Schrittlänge des Vaters beträgt 80 cm.

a) Wie groß ist die durchschnittliche Schrittlänge des Sohnes?

b) Wir nehmen an, daß beide gleichzeitig mit dem rechten Fuß beginnen. Nach dem wievielten Schritt des Vaters treten beide erstmalig gleichzeitig mit dem linken Fuß auf?

7;2) Wir wollen eine Ecke eines Dreiecks "ausgezeichnet" nennen, wenn bei dieser Ecke Innen- und Außenwinkel einander gleich sind. Ermittle die größtmögliche Anzahl "ausgezeichneter" Ecken, die in einem Dreieck auftreten können!

7;3) Ein Tourist war an drei aufeinanderfolgenden Tagen jeweils genau die gleiche Zeit unterwegs.
Am ersten Tag ging er zu Fuß mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 6 km/h. Am zweiten Tag benutzte er ein Moped mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h.
Am dritten Tag benutzte er ein Auto mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h.

Der an den drei Tagen zurückgelegte Gesamtweg betrug 520 km. Ermittle die Zeit, die er an jedem einzelnen der Tage unterwegs war, und die Anzahl der am ersten, zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegten Kilometer.

7;4) Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt der Seite BC. Beweise, daß dann die Punkte B und C von der Geraden g den gleichen Abstand haben!

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

7;1) Lösung: 3 Punkte

a) Mit 4 Schritten legt der Vater 320 cm zurück; denn $4 \cdot 80\text{ cm} = 320\text{ cm}$. Da der Sohn für die gleiche Strecke 5 Schritte braucht, beträgt wegen $320 : 5 = 64$ seine durchschnittliche Schrittlänge 64 cm.

7 Punkte

b) Genau dann, wenn der Vater ein (positives ganzzahliges) Vielfaches von 4 als Schrittzahl beendet hat, hat der Sohn gleichzeitig mit dem Vater eine ganzzahlige Schrittzahl beendet, treten also Vater und Sohn gleichzeitig auf. Dies geschieht genau dann mit dem linken Fuß, wenn sie eine gerade Anzahl von Schritten beendet haben. Bei dem Vater ist dies für jedes Vielfache von 4 der Fall, bei dem Sohn genau für alle geradzahligen Vielfachen von 5. Das kleinste (positive) geradzahlige Vielfache von 5 ist aber das Zweifache.
Daher treten Vater und Sohn erstmalig nach dem 8. Schritt des Vaters gleichzeitig mit dem linken Fuß auf.

~~Insgesamt 10 Punkte~~

7;2) Lösung: 6 Punkte

Da die Summe je eines Innenwinkels und eines zugehörigen Außenwinkels 180° beträgt, ist eine Ecke genau dann "ausgezeichnet", wenn der Innenwinkel bei dieser Ecke 90° beträgt. Nun gibt es Dreiecke mit genau einem rechten Innenwinkel, aber es gibt keine Dreiecke mit <u>mehr als einem</u> solchen. Daher ist die einzige und mithin auch größte mögliche Anzahl 1.

7;3) <u>Lösung:</u> 12 Punkte

Die an den einzelnen Tagen zurückgelegten Wege sind proportional den jeweiligen Durchschnittsgeschwindigkeiten. Der am zweiten bzw. dritten Tag zurückgelegte Weg ist also das 5- bzw. 10fache des am ersten Tag zurückgelegten Weges.
Wegen $1 + 5 + 10 = 16$ ist somit der Gesamtweg, nach Aufgabenstellung 520 km, das 16fache des am ersten Tage zurückgelegten Weges. Dies ist nur möglich, wenn der am ersten Tage zurückgelegte Weg 520 km : 16 = 32,5 km und folglich der am zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegte Weg $5 \cdot 32{,}5$ km = 162,5 km bzw. $10 \cdot 32{,}5$ km = 325 km betrugen. Daraus ergibt sich wegen $\frac{32{,}5}{6} = \frac{65}{12}$ $(= 5\frac{25}{60})$ die am ersten Tage (und nach Aufgabenstellung an jedem der drei Tage) aufgewendete Zeit als $\frac{65}{12}$h (=5h25min).

7;4) <u>Lösung:</u> 12 Punkte

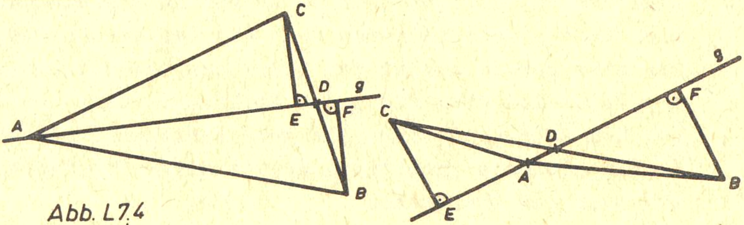

Abb. L7;4

Der Mittelpunkt der Seite BC sei D, das Lot von C bzw. von B auf g sei CE bzw. BF (siehe Abb. L 7;4).
Fällt E mit D zusammen, dann fällt auch F mit D zusammen, und es gilt $AD \perp CB$ und damit wegen $\overline{CE} = \overline{CD}$ und $\overline{BF} = \overline{BD}$ auch $\overline{CE} = \overline{BF}$.
Fällt E nicht mit D zusammen, so fällt auch F nicht mit D zusammen, Dann stimmen die Dreiecke $\triangle$ CDE und $\triangle$ BDF in den Seitenlängen $\overline{CD}$, $\overline{BD}$, den Größen der anliegenden Winkel $\sphericalangle$CDE, $\sphericalangle$ BDF (Scheitelwinkel) und denen der gegenüberliegenden (rechten) Winkel $\sphericalangle$CED, $\sphericalangle$BFD überein.
Also gilt $\triangle CDE \cong \triangle BFD$, und daraus folgt $\overline{CE} = \overline{BF}$ w. z. b. w.