IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 6

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnung, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

6;1) Klaus nahm als Mitglied der Sektion Radsport einer Betriebssportgemeinschaft an einem Bahnrennen teil. Nach dem Rennen wurde Klaus von seinem Bruder Reiner nach dem Ausgang des Rennens gefragt. Klaus sagte: "Als ich den Zielstrich überfuhr, war kein Fahrer neben mir; genau ein Drittel der beteiligten Fahrer hatte das Ziel schon vor mir erreicht, und genau die Hälfte aller Teilnehmer lag noch hinter mir."
Gib an, welchen Platz Klaus in diesem Rennen belegte und wieviel Fahrer insgesamt an dem Rennen teilnahmen!

6;2) Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind wie auf dem Zifferblatt einer Uhr die Zahlen 1 bis 12 aufgetragen.
Untersuche, ob sich diese vier Kreisscheiben durch Einzeichnen von Linien (z. B. Geraden), die keine der Ziffern treffen, so in Teilstücke zerlegen lassen, daß die Summen der auf jedem Teilstück derselben Kreisscheibe liegenden Zahlen jeweils untereinander gleich sind!
Dabei ist die erste Kreisscheibe in 2 Teile, die zweite in 3 Teile, die dritte in 4 Teile und die vierte in 6 Teile zu zerlegen.

6;3) Die Abb. A 6;3 zeigt drei verschiedene Geraden durch einen Punkt C und eine vierte Gerade, die nicht durch C geht. Diese möge die drei erstgenannten Geraden in den Punkten A, B bzw. D schneiden, wobei B zwischen A und D liegen möge. Punkt E liege auf der Geraden durch A und C so, daß C zwischen A und E liegt.

Ferner gelte $\sphericalangle ECD \cong \sphericalangle ABC$!
Beweise, daß $\sphericalangle BCD \cong \sphericalangle BAC$ ist!

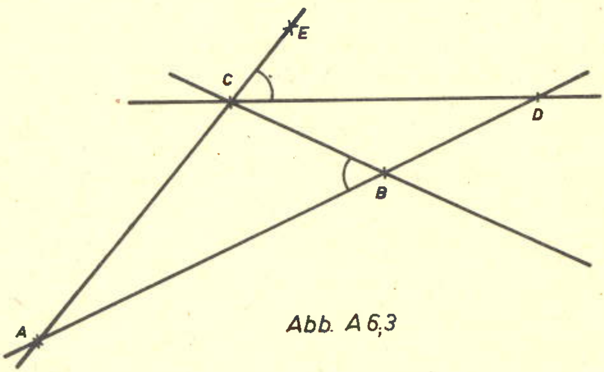
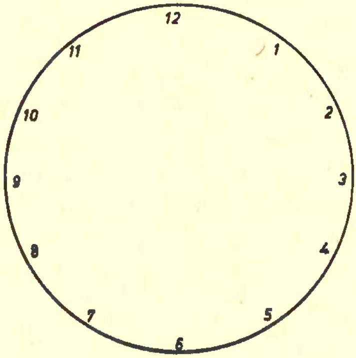


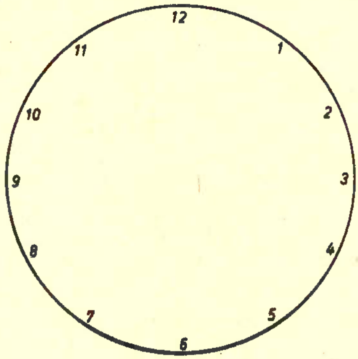
Abb. A 6;3

6;4) Jürgen und seine jüngere Schwester Elke haben den gleichen Schulweg. Elke braucht vom Elternhaus bis zum Schultor genau 30 Minuten, Jürgen genau 20 Minuten. An einem Tage ging Elke genau 5 Minuten vor Jürgen aus dem Haus. Nach wieviel Minuten holte Jürgen seine Schwester ein?
(Es sei angenommen, daß jeder von beiden mit gleichbleibender Geschwindigkeit ging.)

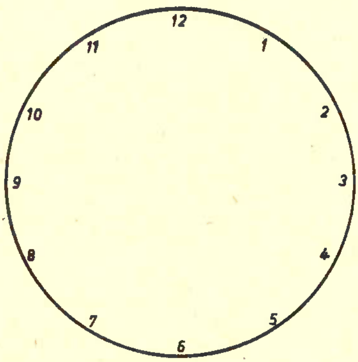
Arbeitsblatt für Aufgabe 6;2



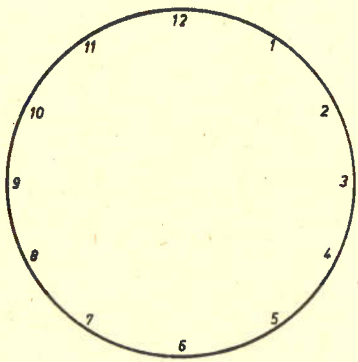
(1)



(2)



(3)



(4)

30 04 06-1

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 6

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

6;1) Lösung: 8 Punkte

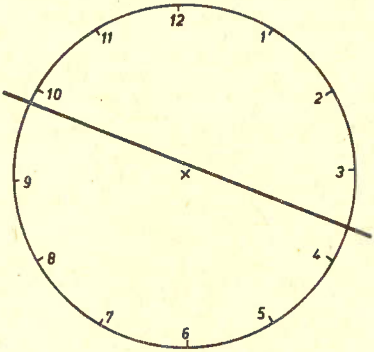
(I) Nach Aufgabenstellung waren (wegen $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$) alle Fahrer außer Klaus so viel wie $\frac{5}{6}$ aller teilnehmenden Fahrer. Klaus stellte daher $\frac{1}{6}$ aller Teilnehmer dar. Das ist nur möglich, wenn die Teilnehmerzahl 6 betrug.

(II) Daher erreichten wegen $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ genau 2 der Teilnehmer vor Klaus das Ziel, so daß Klaus den 3. Platz belegte.

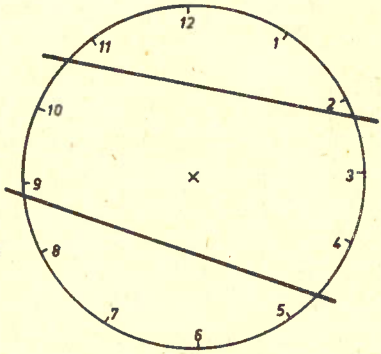
6;2) Lösung: 10 Punkte

Die Summe der auf jeder Kreisscheibe aufgetragenen Zahlen beträgt jeweils 78. Die Kreisscheibe läßt sich daher höchstens dann in die laut Aufgabe geforderten Teile zerlegen, wenn die verlangte Teilanzahl (also 2; 3; 4; 6) ein Teiler von 78 ist. Das gilt für 2; 3 und 6, für 4 dagegen nicht. Daher lassen sich höchstens die erste, die zweite und die vierte Kreisscheibe in der geforderten Weise zerlegen. Eine Zerlegung in 4 derartige Teile (Kreisscheibe 3) ist nicht möglich. Wie die Abb. L 6;2 zeigt, können die genannten Kreisscheiben tatsächlich der Aufgabe entsprechend geteilt werden. Dabei beachten wir, daß für die Zahlen 1, 2, ..., 12 gilt:

$$1 + 12 = 2 + 11 = 3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7 = 13$$

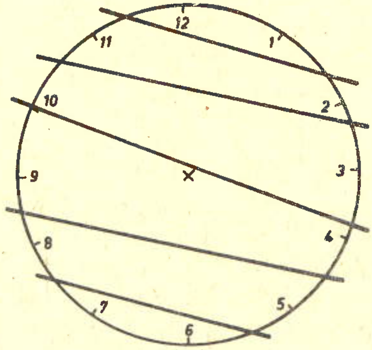


(1)



(2)

Abb. L6;2



(4)

6;3) <u>Lösung</u>: **12** Punkte

Die Summe der Winkel ∢ ACB und ∢ ECD wird von ∢ BCD zu 180° ergänzt. Die nach Voraussetzung ihr gleiche Summe der Winkel ∢ ACB und ∢ ABC wird von ∢ BAC zu 180° ergänzt (Winkelsumme im Dreieck △ ABC). Daraus folgt die Behauptung

$$\sphericalangle\, BCD \cong \sphericalangle\, BAC.$$

<u>Anmerkung</u>: Die Lösung kann auch mit Hilfe des Außenwinkelsatzes oder der Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen erfolgen. In diesem Fall wäre z. B. die Parallele zu BC durch den Punkt A zu ziehen, usw.

6;4) <u>Lösung</u>: 10 Punkte

Laut Aufgabe legt Elke in jeder Minute genau $\frac{1}{30}$ des Schulweges, Jürgen in jeder Minute genau $\frac{1}{20}$ des gleichen Weges zurück. Da Elke 5 Minuten vor Jürgen losgegangen ist, hat sie vor Jürgen in dieser Zeit einen Vorsprung von $\frac{5}{30} = \frac{10}{60}$ des Weges.

Wegen $\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$ verringert sich dieser Vorsprung in jeder Minute um $\frac{1}{60}$ des Gesamtweges. Die gesuchte Anzahl der Minuten bis zum Einholen kann also nur diejenige Zahl sein, mit der man $\frac{1}{60}$ multiplizieren muß, um $\frac{10}{60}$ zu erhalten. Das ist die Zahl 10.

Jürgen holt unter den angegebenen Umständen seine Schwester in genau 10 Minuten ein.

<u>Andere Lösung</u>:

Für die Hälfte des Schulweges brauchten bei konstanter Geschwindigkeit Jürgen genau 10 Minuten und Elke genau 15 Minuten. Da Elke genau 5 Minuten Vorsprung hat, holt Jürgen sie in genau 10 Minuten ein.