VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Jeder nicht negative periodische Dezimalbruch repräsentiert eine rationale Zahl, die auch in der Form $\frac{p}{q}$ dargestellt werden kann (p und q natürliche Zahlen und teilerfremd, $p \geq 0, q > 0$).
Nun seien a_1, a_2, a_3 und a_4 Ziffern zur Darstellung von Zahlen im dekadischen System. Dabei sei $a_1 \neq a_3$ oder $a_2 \neq a_4$.
Beweisen Sie:

Die Zahlen $z_1 = 0,\overline{a_1a_2a_3a_4} = 0,a_1a_2a_3a_4a_1a_2a_3a_4\ldots$

$z_2 = 0,\overline{a_4a_1a_2a_3}$

$z_3 = 0,\overline{a_3a_4a_1a_2}$

$z_4 = 0,\overline{a_2a_3a_4a_1}$

haben in der obigen Darstellung $\frac{p}{q}$ stets gleiche Nenner.

2. In einer Ebene ε liege ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Als "Spiegelung am Kreis k" bezeichnet man die folgende Abbildung, durch die jedem Punkt $P \neq M$ aus ε ein Punkt P' aus ε zugeordnet wird:
(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.
(2) Es ist $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = r^2$.

a) Konstruieren Sie zu einem beliebig im Innern von k gegebenen Punkt $P \neq M$ den Spiegelpunkt P' !

b) Es sei ein weiterer Kreis k_1 beliebig gegeben, jedoch so, daß M außerhalb von k_1 liegt. Konstrieren Sie k_1', d. h. die Menge aller Spiegelpunkte P' der Punkte P von k_1 !

3. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen u,v,w heißt eine Halbgruppe, wenn in ihr eine Operation definiert ist, die jedem geordneten Paar (u,v) von Elementen aus $\mathfrak{M}$ eindeutig ein Element w aus $\mathfrak{M}$ zuordnet (man schreibt $u \circ v = w$) und wenn diese algebraische Operation assoziativ ist, d.h. wenn für alle Elemente u,v,w aus $\mathfrak{M}$ gilt:

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w).$$

Es sei nun c eine positive reelle Zahl und es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller nicht negativen reellen Zahlen, die kleiner als c sind. Für je zwei Zahlen u, v aus $\mathfrak{M}$ werde definiert:

$$u \circ v = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

Man untersuche

a) ob $\mathfrak{M}$ eine Halbgruppe ist;

b) ob diese Halbgruppe regulär ist, d.h. ob aus

$u \circ v_1 = u \circ v_2$ stets $v_1 = v_2$ und aus

$v_1 \circ u = v_2 \circ u$ ebenfalls $v_1 = v_2$ folgt.

A 11/12; II

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR.Olympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

4. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$|\log_2 (x+y)| + |\log_2(x-y)| = 3$$
$$xy = 3$$
!

5. Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen x gilt:

$$\sin 5x = 16 \sin x \cdot \sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x-\frac{2\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right) .$$

6. Es seien n eine positive ganze Zahl, h eine reelle Zahl und f(x) ein Polynom (ganze rationale Funktion) mit reellen Koeffizienten vom Grade n, das keine reellen Nullstellen besitzt. Man beweise, daß dann auch das Polynom

$$F(x)=f(x)+h\cdot f'(x)+h^2\cdot f''(x)+\ldots+h^n\cdot f^{(n)}(x)$$

keine reellen Nullstellen hat!

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

1. Es gilt: 5 Punkte

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{1000a_1+100a_2+10a_3+a_4}{9999} \\ z_2 &= \frac{1000a_4+100a_1+10a_2+a_3}{9999} \\ z_3 &= \frac{1000a_3+100a_4+10a_1+a_2}{9999} \\ z_4 &= \frac{1000a_2+100a_3+10a_4+a_1}{9999} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ferner ist $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$ (2)

Die Zähler der vier Zahlen z_k in der Darstellung (1) sind Zahlen mit gleicher Quersumme. Daher können entweder alle Brüche von (1) oder keiner von ihnen durch 3 bzw. 9 gekürzt werden.
Der Zähler von z_1 in (1) ist genau dann durch 11 teilbar, wenn

(3) $a_1-a_2+a_3-a_4 = k\cdot 11$ (k ganzzahlig) gilt.

Bei den für z_2, z_3 bzw. z_4 vorliegenden (zyklischen) Permutationen der a_k unterscheiden sich die Summen in (3) entweder nur durch ihr Vorzeichen oder überhaupt nicht.
Also lassen sich entweder alle Brüche von (1) oder keiner von ihnen durch 11 kürzen.
Wegen $101\cdot(10n+m)=1000n+100m+10n+m$ könnte ferner einer der Zähler der Brüche von (1) nur dann durch 101 teilbar sein, wenn $a_1=a_3$ und $a_2=a_4$ gelten würde. Das widerspricht der Voraussetzung. Daher können die Brüche

von (1) nicht durch 101 gekürzt werden.
Da somit alle vier Brüche stets durch dieselben Zahlen gekürzt werden können, sind sie auch nach dem jeweils so weit wie möglich durchgeführten Kürzen stets gleichnamig.

2. a) Man zeichne durch P die Sehne, die auf PM senkrecht steht. Die Tangenten an k in den Endpunkten A,B der Sehne schneiden sich im Punkt P'. Da $P \neq M$ ist, ist AB nicht Durchmesser von k, die Tangenten in den Punkten A und B sind daher nicht parallel, schneiden einander also in einem Punkt P'. — 7 Punkte

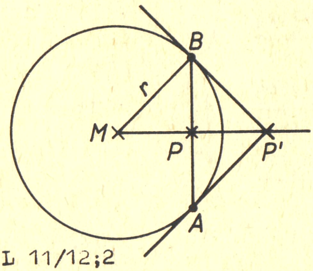

Abb. L 11/12;2

Dieser liegt aus Symmetriegründen auf dem Strahl $\overrightarrow{MP}$.
Da nach dem Lehrsatz des Euklid $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = r^2$ gilt, ist P' der Spiegelpunkt von P bezüglich k.

b) Es sei ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem (x,y) so gewählt, daß sein Ursprung in M liegt und daß der Mittelpunkt des Kreises k_1 ein Punkt $M_1(x_0,0)$ der positiven x-Achse wird. Der Radius von k_1 sei a. Dann gilt $0<a<x_0$.
Nach Definition der Spiegelung bestehen zwischen den Koordinaten x,y eines Punktes $P \neq M$ und den Koordinaten x',y' seines Spiegelpunktes P' die Beziehungen

$$x^2+y^2 = \frac{r^4}{x'^2+y'^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \quad \text{, also}$$

$$x = \frac{x' \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{r^2 x'}{x'^2 + y'^2}$$

Nun gilt für alle Punkte P (x,y) von k_1 und nur für diese

$$(x-x_0)^2 + y^2 = a^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 + x_0^2 - a^2 = 0 .$$

Daher gilt für alle Punkte $P'(x',y')$ von k_1' und nur für diese

$$\frac{r^4}{x'^2 + y'^2} - \frac{2r^2 x_0 x'}{x'^2 + y'^2} + x_0^2 - a^2 = 0 .$$

Wegen $x_0^2 - a^2 \neq 0$ und $x'^2 + y'^2 \neq 0$ für alle P' auf k_1' ist dies gleichbedeutend mit

$$\frac{r^4}{x_0^2 - a^2} - \frac{2r^2 x_0 x'}{x_0^2 - a^2} + x'^2 + y'^2 = 0 \text{ , d.h. mit}$$

$$\left(x' - \frac{r^2 x_0}{x_0^2 - a^2}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{r^2 a}{x_0^2 - a^2}\right)^2 .$$

Das ist die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M_1 \left(\frac{r^2 \cdot x_0}{x_0^2 - a^2}, 0\right)$ und dem Radius $\frac{r^2 a}{x_0^2 - a^2}$.

Dieser Kreis ist somit die gesuchte Bildkurve k_1' . Man kann M_1 (und damit k_1') als Mittelpunkt der Bildpunkte $\left(\frac{r^2}{x_0 - a}, 0\right)$, $\left(\frac{r^2}{x_0 + a}, 0\right)$ der beiden Punkte $(x_0 - a, 0)$, $(x_0 + a, 0)$ nach a) konstruieren.

3\. a) Es seien u,v Elemente aus $\mathfrak{M}$. 6 Punkte

(1) Wegen $c>0$, $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ ist $\dfrac{u+v}{1+\dfrac{uv}{c^2}} \geqq 0$.

(2) Wegen $u<c$, $v<c$ gilt $0<(c-u)(c-v)$, also $cu+cv<c^2+uv$,

$c(u+v)<c^2(1+\frac{uv}{c^2})$, woraus nach Division durch die

positive Zahl $c(1+\frac{uv}{c^2})$ folgt: $\dfrac{u+v}{1+\dfrac{uv}{c^2}} < c$.

Ferner ist $u \circ v \geqq 0$, $u \circ v$ ist also ein Element aus $\mathfrak{M}$.

Man erhält für alle u,v,w aus $\mathfrak{M}$:

$$(u \circ v) \circ w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \circ w = \frac{c^2(u+v) + (c^2+uv)w}{c^2+uv+(u+v)w}$$

(Erweiterung mit $c^2+uv=c^2(1+\frac{uv}{c^2})$),

$$u \circ (v \circ w) = u \circ \frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}} = \frac{(c^2+vw)u + c^2(v+w)}{c^2+vw+u(v+w)}$$

(Erweiterung mit $c^2+vw=c^2(1+\frac{vw}{c^2})$),

also $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.

Die Menge $\mathfrak{M}$ ist eine Halbgruppe.

b) Aus $u \circ v_1 = u \circ v_2$ für alle Elemente u aus $\mathfrak{M}$ folgt

$$\frac{u+v_1}{1+\frac{uv_1}{c^2}} = \frac{u+v_2}{1+\frac{uv_2}{c^2}} \quad , \ (u+v_1)(c^2+uv_2)=(u+v_2)(c^2+uv_1),$$

$$uc^2+v_1c^2+u^2v_2+uv_1v_2 = uc^2+v_2c^2+u^2v_1+uv_1v_2 \ ,$$

$$v_1(c^2-u^2) = v_2(c^2-u^2)$$

und hieraus, da $0 \leqq u < c$, also $c^2 - u^2 > 0$ gilt,

$$v_1 = v_2 .$$

Analog beweist man, daß aus $v_1 \circ u = v_2 \circ u$ ebenfalls $v_1 = v_2$ folgt.

Die Halbgruppe $\mathfrak{A}$ ist also regulär.

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

4. Angenommen, (x,y) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems, dann gilt: $x+y > 0$, $x-y > 0$. **6 Punkte**

Da ferner (1) $xy = 3$ ist, gilt (2) $x > 0$, $y > 0$.
Aus (1) und (2) folgt weiter, daß mindestens eine der Zahlen x,y größer als 1 ist; hieraus und aus (2) erhält man $x+y > 1$, also $\log_2(x+y) > 0$.

Daher folgt $\log_2(x+y)+\left|\log_2(x-y)\right| = 3$.

Fallunterscheidung:

(a) Wenn $x-y \geq 1$ ist, dann gilt $\left|\log_2(x-y)\right| = \log_2(x-y)$, und es folgt

$\log_2(x+y)+\log_2(x-y)=3$, also (3) $x^2-y^2=8$.

Aus (1),(3) und (2) folgt dann $x = 3$ und $y = 1$.

(b) Wenn $0 < x-y < 1$ ist, dann ist $\left|\log_2(x-y)\right| = -\log_2(x-y)$, und es folgt

$\log_2(x+y)-\log_2(x-y)=3$, also (4) $\frac{x+y}{x-y} = 8$.

Aus (1), (4) und (2) folgt $x=\sqrt{\frac{27}{7}} = \frac{3}{7}\sqrt{21}$, $y = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{21}$.

Das gegebene System hat daher höchstens die beiden Lösungen $(3;1)$ und $(\frac{3}{7}\sqrt{21};\frac{1}{3}\sqrt{21})$.

Man bestätigt für $(3;1)$ leicht, daß das Gleichungssystem erfüllt wird.

Für $x=\frac{3}{7}\sqrt{21}$ und $y=\frac{1}{3}\sqrt{21}$ erhält man

$$x+y=\frac{16}{21}\sqrt{21} = \frac{16}{\sqrt{21}}>1,\quad x-y=\frac{2}{21}\sqrt{21} = \frac{2}{\sqrt{21}}<1, \text{ also}$$

$$|\log_2(x+y)| = \log_2\frac{16}{\sqrt{21}} = 4 - \log_2\sqrt{21},$$

$$|\log_2(x-y)| = -\log_2\frac{2}{\sqrt{21}} = -1+\log_2\sqrt{21},$$

also ist die erste Gleichung des gegebenen Gleichungssystems erfüllt und, wie man durch Multiplikation erkennt, auch die zweite.

5. Es sei $A=16\sin x\cdot\sin(x-\frac{\pi}{5})\sin(x+\frac{\pi}{5})\sin(x-\frac{2\pi}{5})\sin(x+\frac{2\pi}{5})$. 8 Punkte

Wegen $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=\frac{1}{2}(\cos 2b-\cos 2a)$ erhält man:

$$A=4\sin x(\cos\frac{2\pi}{5} - \cos 2x)(\cos\frac{4\pi}{5} - \cos 2x)$$

$$=4\sin x\cdot\cos^2 2x-4\sin x\cdot\cos 2x(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5})+4\sin x\cdot\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{4\pi}{5}.$$

Unter Benutzung der Formel $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$ erhält man

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=2\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{3\pi}{5}= -2\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}= - \frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}}$$

$$= - \frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = - \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = - \frac{1}{2}.$$

Weiterhin erhält man

$$\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{4}\,\frac{\sin\frac{8\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}} = - \frac{1}{4}.$$

Daher gilt:

$$A=4\sin x\cos^2 2x+2\sin x\cos 2x-\sin x.$$

Unter Ausnutzung der Relationen $2\cos^2 a=1+\cos 2a$

und $2\sin a\cos b=\sin(a+b)-\sin(b-a)$ ergibt sich:

$$A = (2\sin x+2\sin x\cos 4x)+(\sin 3x-\sin x)-\sin x$$
$$= 2\sin x\cos 4x+\sin 3x$$
$$= (\sin 5x-\sin 3x)+\sin 3x$$
$$= \sin 5x \ .$$

6. Für $h=0$ ist $F(x)=f(x)$, die Behauptung also richtig. 8 Punkte
Sei nun $h \neq 0$. Es ist

$$F'(x)=f'(x)+h\cdot f''(x)+h^2\cdot f'''(x)+\ldots+h^n\cdot f^{(n+1)}(x)$$

und $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$, also

$$h\cdot F'(x)=h\cdot f'(x)+h^2\cdot f''(x)+\ldots+h^n\cdot f^{(n)}(x), \text{ d.h.}$$

$$h\cdot F'(x)=F(x)-f(x).$$

Da $f(x)$ keine reellen Nullstellen hat, muß der Grad n von $f(x)$ gerade sein. Der Grad von $F(x)$ stimmt mit dem Grad von $f(x)$ überein, da der Koeffizient von x^n bei beiden Polynomen übereinstimmt.
Man schließt nun indirekt:
Angenommen, $F(x)$ habe eine reelle Nullstelle x_1. Dann hat

$\frac{F(x)}{x-x_1}$ als Polynom ungeraden Grades ebenfalls mindestens

eine reelle Nullstelle, also hat $F(x)$ entweder zwei verschiedene Nullstellen x_1, x_2, oder x_1 ist eine mehrfache Nullstelle.
Der zweite Fall führt auf den Widerspruch $F(x_1)=F'(x_1)=0$, also $f(x_1)=0$.
Im ersten Falle seien zwei verschiedene Nullstellen $a < b$ von $F(x)$ so gewählt, daß zwischen ihnen keine weitere liegt.
(Das ist möglich, da $F(x)$ nur endlich viele Nullstellen haben kann.) Dann gilt:
(1) $h\cdot F'(a)= -f(a)$; $h\cdot F'(b)= -f(b)$, und da $f(x)$ keine Nullstellen hat, stimmen die Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$ miteinander überein, also stimmen wegen $h \neq 0$ auch die Vorzeichen

von $F'(a)$ und $F'(b)$ miteinander überein.
Da andererseits zwischen a und b keine Nullstelle von $F(x)$ liegt, hat $F(x)$ für alle x mit $a<x<b$ einheitliches Vorzeichen. Ist etwa $F(x)>0$ für alle diese x, so gilt für sie

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \frac{F(x)}{x-a} > 0 \text{ und } \frac{F(x)-F(b)}{x-b} = \frac{F(x)}{x-b} > 0, \text{ also}$$

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} \geqq 0 \text{ und } F'(b) = \lim_{x \to b} \frac{F(x)-F(b)}{x-b} \leqq 0.$$

Demnach haben $F'(a)$ und $F'(b)$, die wegen (1) auch beide $\neq 0$ sind, entgegengesetzte Vorzeichen.
(Entsprechend schließt man dies, wenn $F(x)<0$ für alle $a<x<b$ gilt.)
Der erhaltene Widerspruch zeigt, daß die Annahme, $F(x)$ habe eine reelle Nullstelle, falsch war.