A 11/12;I VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\frac{2x}{a(x+a)} + \frac{1}{x-2a} = \frac{4x+6-a}{a(x-2a)(x+a)}$$

erfüllen!

Dabei sei a eine reelle Zahl. (Fallunterscheidung!)

2. a) Untersuchen Sie, ob die Zahlenfolge

$$a_n = \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5n$$

streng monoton fallend ist!

b) Beweisen Sie, daß alle Glieder a_n dieser Folge größer als 0,7 sind!

3. Es sei P_1P_2 eine Strecke in einer Ebene ε und g die Gerade, die diese Strecke enthält.

a) Von einem Punkt Q auf g, der nicht auf P_1P_2 liegt, werden an alle die Kreise in ε, die P_1P_2 als Sehne besitzen, die Tangenten gelegt.

Beweisen Sie: Die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen auf einem Kreis um Q.

b) Es seien Q_1 und Q_2 zwei verschiedene Punkte auf g, die nicht auf der Strecke P_1P_2 liegen.

Beweisen Sie: Die beiden Kreise um Q_1 und Q_2, die für diese Punkte die Bedingung des Aufgabenteiles a) erfüllen, haben keinen Punkt gemeinsam.

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

4. Durch die Verbesserung der Lebensbedingungen und des Gesundheitsschutzes konnte in der DDR die Tuberkulose mit großem Erfolg bekämpft werden. Während im Jahre 1950 noch 92 760 Erkrankungen an aktiver Tuberkulose auftraten, ging diese Zahl in den folgenden 16 Jahren auf 13 777 im Jahre 1966 zurück.
   a) Um wieviel Prozent nahm jährlich die Anzahl der Erkrankungen ab, wenn man eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt (was, abgesehen von geringen Schwankungen, der Wirklichkeit gut entspricht)?
   b) Wieviel Jahre betrug in dem Zeitraum 1950 bis 1966 die sogenannte Halbwertzeit, d.h. diejenige Zeit, in der die Anzahl der Fälle auf die Hälfte gesenkt wurde (Angabe in Jahren mit einer Stelle nach dem Komma)?
   c) Mit wieviel Erkrankungsfällen ist im Jahre 1970 zu rechnen, wenn man weiter eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt?

5. Gegeben seien eine dreiseitige Pyramide und die ihr umbeschriebene Kugel. Über diese Pyramide und diese Kugel werden die folgenden Aussagen gemacht:
   (1) Eine Grundkante der Pyramide ist ebenso lang wie der Durchmesser der Kugel.
   (2) Die Längen der beiden anderen Grundkanten verhalten sich wie 3 : 4.
   (3) Das Volumen der Pyramide beträgt 40 cm^3.

(4) Alle Kanten der Pyramide sind einander paarweise gleich lang.

(5) Die Grundfläche der Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck.

(6) Die Höhe der Pyramide ist ebenso lang wie der Radius der Kugel.

Es sei bekannt, daß von den obigen sechs Aussagen eine Aussage falsch und die übrigen Aussagen wahr sind.
Wie lang sind die Kanten der Pyramide?

6. Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a\,(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

mindestens eine reelle Lösung hat.

Ferner sind sämtliche Lösungen für $a = \frac{5}{6}$ anzugeben.

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1. (a) Die Gültigkeit der gegebenen Gleichung ist gleichbedeutend mit dem Bestehen der Bedingungen $a \neq 0$, $x \neq -a$, $x \neq 2a$ und der Gleichung 6 Punkt

$$2x^2 - (3a+4)x + a^2 + a - 6 = 0.$$

(b) Diese Gleichung hat, ohne Beachtung der vorgenannten Bedingungen betrachtet, genau die Lösungen $x_1 = a + 3$, $x_2 = \frac{a-2}{2}$.

(c) Mit Hilfe der nachfolgenden Fallunterscheidungen kann man aus den in (b) erhaltenen reellen Zahlen x_1 und x_2 alle die aussondern, die den in (a) genannten Bedingungen für x nicht genügen.

(c_1) Es gilt $x_1 = a + 3 = -a$ genau für $a = -\frac{3}{2}$; und ist dies der Fall, so ergibt sich $x_2 = \frac{a-2}{2} = -\frac{7}{4}$.

(c_2) Es gilt $x_1 = a + 3 = 2a$ genau für $a = 3$ und ist dies der Fall, so ergibt sich $x_2 = \frac{a-2}{2} = \frac{1}{2}$.

(c_3) Es gilt $x_2 = \frac{a-2}{2} = -a$ genau für $a = \frac{2}{3}$ und ist dies der Fall, so ergibt sich $x_1 = a + 3 = \frac{11}{3}$.

(c_4) Es gilt $x_2 = \frac{a-2}{2} = 2a$ genau für $a = -\frac{2}{3}$ und ist dies der Fall, so ergibt sich $x_1 = a + 3 = \frac{7}{3}$.

(d) Aus (a),(b) und (c) ergibt sich die folgende Lösungsübersicht:
Die gegebene Gleichung hat für

$a \neq 0$, $a \neq -\frac{3}{2}$, $a \neq 3$, $a \neq \frac{2}{3}$, $a \neq -\frac{2}{3}$

die Lösungen $x_1 = a + 3$, $x_2 = \frac{a-2}{2}$

(diese sind voneinander verschieden, wenn außerdem noch $a \neq -8$ gilt; ist $a = -8$, so fallen x_1 und x_2 zu der einzigen Lösung $x = -5$ zusammen);

für $a = -\frac{3}{2}$ die Lösung $x = -\frac{7}{4}$;

für $a = 3$ die Lösung $x = \frac{1}{2}$;

für $a = \frac{2}{3}$ die Lösung $x = \frac{11}{3}$;

für $a = -\frac{2}{3}$ die Lösung $x = \frac{7}{3}$;

für $a = 0$ keine Lösung.

2. a) Es gilt: 4 Punkte

$$a_{n+1}-a_n = \sqrt{25(n+1)^2+7(n+1)+1} -5(n+1)-\sqrt{25n^2+7n+1} +5n$$
$$= \sqrt{25(n+1)^2+7(n+1)+1} -(\sqrt{25n^2+7n+1} +5)$$

und wegen $\sqrt{25n^2+7n+1} + 5 > 0$

$$a_{n+1}-a_n = \sqrt{25n^2+7n+26+(50n+7)} - \sqrt{(\sqrt{25n^2+7n+1} + 5)^2}$$
$$= \sqrt{25n^2+7n+26+(50n+7)} - \sqrt{25n^2+7n+26+10\sqrt{25n^2+7n+1}}$$

(1) Weiter gilt:

$$100(25n^2+7n+1) > 2500n^2+700n+49=(50n+7)^2$$

und daher

(2) $10\sqrt{25^2+7n+1} > 50n+7$.

Aus (1) und (2) folgt $a_{n+1}-a_n < 0$ für alle n, d.h. die Folge ist streng monoton fallend.

b) Aus (2) folgt $\sqrt{25n^2+7n+1} > 5n+\frac{7}{10}$, also 2 Punkte

$a_n = \sqrt{25n^2+7n+1} - 5n > \frac{7}{10} = 0,7.$

Oder: Die Bedingung $a_n > 0,7$ ist äquivalent mit

$\sqrt{25n^2+7n+1} > 5n+\frac{7}{10}$

und diese mit der offensichtlich richtigen Ungleichung

$25n^2+7n+1 > 25n^2+7n+(\frac{7}{10})^2$

zusammen 6 Punkte

3. a) Bezeichnung siehe Abbildung L11/12;3. 3 Punkte

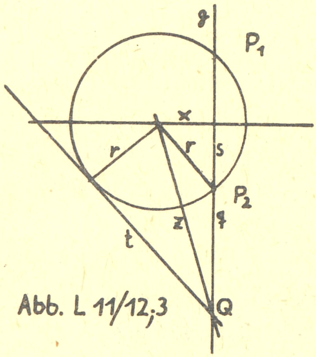

Abb. L 11/12;3

Es gilt: $t^2=z^2-r^2$

$z^2=x^2+(s+q)^2$

$r^2=x^2+s^2$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras

Daraus folgt:

$$t^2=q^2+2qs<(q+s)^2 \qquad (1)$$

Also ist t, unabhängig von x bzw. r, bereits durch q und s bestimmt.

w.z.b.w.

b) Aus Gleichung (1) folgt $t<q+s$. 5 Punkte

Daher können zwei verschiedene Kreise um Q_1 und Q_2 nur dann einen Punkt gemeinsam haben, wenn Q_1 und Q_2 auf derselben Seite von P_2 liegen.

Angenommen, die Kreise $k_1(Q_1;t_1)$ und $k_2(Q_2;t_2)$ haben den Punkt P gemeinsam, und P liegt nicht auf g. Dann gibt es durch P, P_1 und P_2 genau einen Kreis k_0.

Für diesen Kreis müßten die Geraden PQ_1 und PQ_2 (da die Bedingung von a) gelten soll) beide Tangenten im Punkt P sein. Dies ist aber nicht möglich. Daher kann P höchstens auf g liegen.

Es sei nun o.B.d.A. $t_2 = t_1+a$ mit $a = |q_2 - q_1|$.
Für $a = q_2 - q_1$ gilt dann:

$t_2^2 = q_2^2 + 2\,q_2 s$ nach (1), also

$t_2^2 = (q_1+a)^2+2(q_1+a)s$

$= q_1^2+2q_1 s+a^2+2aq_1 +2as.$

Andererseits gilt nach (1)

$t_1^2=q_1^2+2q_1 s.$

Damit ergibt sich einerseits

$t_2^2= t_1^2+a^2+2a\cdot(q_1+s)$

und andererseits

$t_2^2=(t_1+a)^2=t_1^2+2at_1+a^2$, woraus

$t_1=q_1+s$ im Gegensatz zu (1) folgt.

Auch im Falle $a = q_1-q_2$ ergibt sich in analoger Weise ein Widerspruch. Somit ist die Behauptung b) bewiesen.

zusammen 8 Punkte

L 11/12;II VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

4. a) Die jährliche Abnahme betrage p %, und es sei 2 Punkte

$q = 1 - \frac{p}{100}$;

dann gilt:

$92\,760 \cdot q^{16} = 13\,777,$

$q^{16} = \frac{13\,777}{92\,760}$.

$16 \lg q = \lg 13777 - \lg 92760 = 4{,}1392 - 4{,}9673 = 15{,}1719 - 16$ +)

$\lg q = 0{,}9482 - 1,$

$q = 0{,}8876, \quad p = 11{,}24$

Die jährliche Abnahme betrug also durchschnittlich rund 11,2 %.

b) Die Halbwertzeit (x Jahre) erhält man aus 2 Punkte

$q^x = 0{,}5, \quad x = \frac{\lg 0{,}5}{\lg q} = \frac{0{,}6990-1}{0{,}9482-1} = \frac{0{,}3010}{0{,}0518} = 5{,}81.$

Die Halbwertzeit betrug also rund 5,8 Jahre.

c) Die Anzahl der Erkrankungsfälle würde nach den angegebenen Voraussetzungen im Jahre 1970 nur noch $13\,777 \cdot q^4 \approx 8\,554$ betragen. 2 Punkte

$(\lg q^4 = 4 \cdot \lg q = (3{,}1719 - 4) : 4)$

zusammen 6 Punkte

+) Wie in der numerischen Mathematik üblich, schreiben wir das Gleichheitszeichen auch dann, wenn nur approximative Gleichheit vorliegt, wobei der Fehler bei den der Tafel entnommenen Werten höchstens 5 Einheiten der folgenden (nicht mehr hingeschriebenen) Stelle beträgt.

5. Wäre die Aussage (4) wahr, so wäre die Grundfläche der Pyramide ein gleichseitiges Dreieck, und jede der beiden Aussagen (1) und (5) wäre falsch. Das ist aber nach Voraussetzung nicht möglich. Daher ist die Aussage (4) falsch, und die anderen Aussagen sind wahr. — 6 Punkte

Wegen (1) und (2) ist die Grundfläche der Pyramide ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Längen 3x und 4x haben und dessen Hypotenuse die Länge 5x hat.

5x ist gleichzeitig die Länge des Durchmessers der Kugel. Wegen (6) hat daher die Höhe der Pyramide die Länge $\frac{5}{2}$ x. Wegen (3) erhält man

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4x \cdot \frac{5}{2} x = 5x^3 = 40 \text{ cm}^3,$$

also $$x = 2 \text{ cm}.$$

Die Grundkanten der Pyramide haben daher die Längen 6 cm, 8 cm, 10 cm. Jede der drei übrigen Seitenkanten hat die Länge $5\sqrt{2}$ cm.

6. Es gilt für alle reellen x — 8 Punkte

$$1=(\sin^2x+\cos^2x)^2=\sin^4x+\cos^4x+2\sin^2x\cos^2x,$$

also $$\sin^4x+\cos^4x=1-2\sin^2x\cos^2x;$$

ferner

$$1=(\sin^2x+\cos^2x)^3=\sin^6x+3\sin^4x\cos^2x+3\sin^2x\cos^4x+\cos^6x$$

$$=\sin^6x+\cos^6x+3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)$$

$$=\sin^6x+\cos^6x+3\sin^2x\cos^2x,$$

also

$$\sin^6x+\cos^6x = 1-3\sin^3x\cos^2x.$$

Die gegebene Gleichung ist daher äquivalent mit jeder der folgenden beiden Gleichungen:

$1-3 \sin^2 x \cos^2 x = a-2a \sin^2 x \cos^2 x,$

$(2a-3) \sin^2 x \cos^2 x = a-1$

und weiter mit

$4 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{4(a-1)}{2a-3}$,

$\sin^2 2x = \frac{4(a-1)}{2a-3}$, da die vorhergehenden Gleichungen für $2a - 3 = 0$ sicher keine Lösungen haben.

Die gegebene Gleichung hat also genau dann mindestens eine reelle Lösung, wenn

$$0 \leqq \frac{4(a-1)}{2a-3} \leqq 1 \text{ gilt.} \qquad (1)$$

Angenommen, für ein a gelte (1). Dann ist $a \neq \frac{3}{2}$.

Wäre nun $a > \frac{3}{2}$, so folgte $4a-4 = 2a-3$, d.h.

$a = \frac{1}{2}$, also ein Widerspruch.

Daher ergibt sich $a < \frac{3}{2}$ und damit weiter

$0 \geqq 4(a-1) \geqq 2a-3, \qquad (2)$

also $a \leqq 1$ und $4a-4 \geqq 2a-3$, d.h. $a \geqq \frac{1}{2}$.

Mithin kann (1) höchstens für alle a mit

$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1 \qquad (3)$

gelten.

Trifft umgekehrt (3) zu, so gilt (2) und zugleich $a < \frac{3}{2}$, woraus in der Tat folgt, daß (1) erfüllt ist.

Die obige Gleichung hat also genau für alle $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ mindestens eine reelle Lösung.

Für $a = \frac{5}{6}$ erhält man $|\sin 2x| = 2\sqrt{\frac{1 - \frac{5}{6}}{3 - \frac{10}{6}}} = 2\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

mit $2x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, d.h.

$x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}$ (k ganze Zahl) als sämtlichen

Lösungen.