A 11/12;I

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen.

1. Geben Sie alle Primzahlen p an, für die sowohl $p + 10$ als auch $p + 14$ Primzahlen sind!

2. In einer dreiseitigen Pyramide sei die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a, die Spitze S liege in der Höhe h über dem Schnittpunkt M der Seitenhalbierenden des Grunddreiecks.
Welchen Wert hat der Quotient $\frac{h}{a}$, wenn der Neigungswinkel zweier Seitenflächen der Pyramide gegeneinander 90° beträgt?

3. Man gebe zwölf reelle Zahlen $a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6$ so an, daß für jede reelle Zahl x die Gleichung
$$x^{12}+1=(x^2+a_1x+b_1)\cdot(x^2+a_2x+b_2)\cdot(x^2+a_3x+b_3)\cdot(x^2+a_4x+b_4)\cdot(x^2+a_5x+b_5)\cdot(x^2+a_6x+b_6)$$
gilt!

A 11/12;II

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen.

4. Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die die Gleichung
$$|x+1| \cdot |x-2| \cdot |x+3| \cdot |x-4| = |x-1| \cdot |x+2| \cdot |x-3| \cdot |x+4|$$
erfüllt ist.

5. Man beweise $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$, ohne die Wurzeln auszurechnen.

6. Ein Trapez ABCD, dessen Grundseiten die Längen a und b $(a > b)$ haben und dessen beide anderen (nichtparallelen) Seiten, genügend verlängert, einen Winkel der Größe α einschließen mögen, habe einen Inkreis.
Berechnen Sie aus den Größen a, b und α den Durchmesser d dieses Inkreises!

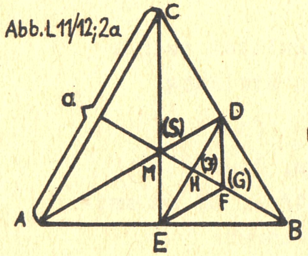
L 11/12;I

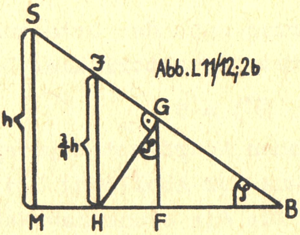
VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

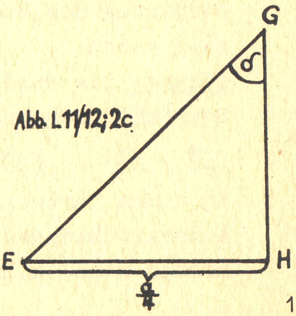
<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Eine solche Primzahl ist $p = 3$; denn für $p = 3$ sind $p + 10 = 13$ und $p + 14 = 17$ Primzahlen. **6 Punkte**
Außer der Primzahl 3 gibt es keine weiteren Primzahlen mit dieser Eigenschaft.
<u>Beweis:</u> Sei p eine von 3 verschiedene Primzahl. Dann ist 3 kein Teiler von p. Die Zahl p läßt sich daher stets entweder in der Form (1) $p = 3m + 1$ oder in der Form (2) $p = 3m - 1$ (m jeweils natürliche Zahl) darstellen. Im Fall (1) ist dann $p + 14 = 3m + 15 = 3\,(m + 5)$ größer als 3 und durch 3 teilbar, mithin keine Primzahl. Im Fall (2) ist dagegen $p + 10 = 3m + 9 = 3\,(m + 3)$ größer als 3 und durch 3 teilbar, also keine Primzahl. Es gibt also keine von 3 verschiedene Primzahl, für die sowohl $p + 10$ als auch $p + 14$ Primzahlen sind.

2. <u>1. Lösungsweg:</u> Wählt man die in den Abb. L 11/12;2a, b, c gewählten Bezeichnungen, dann ist $\tan\delta = \frac{\overline{EH}}{\overline{HG}}$ (Abb. L 11/12; 2c), wobei $\overline{EH} = \frac{1}{4}\,a$ (Abb. L 11/12; 2a) und $\overline{HG} = \frac{a}{4}\sqrt{3}$ (Abb. L 11/12; 2b) ist. **6 Punkte**
Weiter gilt im Dreieck $\triangle$ MBS:







$$\sin\varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}\,h}{\sqrt{a^2 + 3h^2}}, \text{ also}$$

$$\overline{HG} = \frac{3\,ah}{4\sqrt{a^2 + 3h^2}}, \text{ so daß schließlich}$$

$$\tan\delta = \frac{\sqrt{a^2 + 3h^2}}{3h} \quad \text{wird.}$$

Setzt man noch $\frac{h}{a} = \lambda$, also $\tan\delta = \frac{\sqrt{1 + 3\lambda^2}}{3\lambda}$,

so ist nach Aufgabenstellung ($\delta = 45^\circ$) λ aus der Bedingung

$$\frac{\sqrt{1 + 3\lambda^2}}{3\lambda} = 1, \text{ wegen } \lambda > 0 \text{ also } \lambda = \frac{1}{6}\sqrt{6}$$

zu berechnen. Damit lautet die Lösung:
Wenn der Neigungswinkel zweier Seitenflächen der Pyramide gegeneinander 90° beträgt, so gilt:

$$\lambda = \frac{h}{a} = \frac{1}{6}\sqrt{6} \approx 0{,}408.$$

2. Lösungsweg:

Vorbemerkung: Das Vektorprodukt wird zwar nicht verbindlich im Lehrplan verlangt, aber es wird ein Hinweis auf das Vektorprodukt gefordert, wobei die "Nicht-Kommutativität" dieser Produktbildung erörtert werden soll. Daher gibt es sicher nicht wenige Schüler, die über das Vektorprodukt Bescheid wissen. Unter Benutzung des Vektorproduktes läßt sich folgende Lösung geben:

Lösung: Die Forderung nach der Orthogonalität zweier Seitenflächen lautet in vektorieller Darstellung

$$(\overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{BS} \times \overrightarrow{BC}) = 0 \qquad (1)$$

In einem kartesischen Koordinatensystem, dessen Achsenrichtungen aus der Abbildung L 11/12; 2d zu entnehmen sind, gilt für die einzelnen Vektoren:

$$\overrightarrow{AS} = -\frac{a}{6}\sqrt{3}\,\mathfrak{i} + \frac{a}{2}\,\mathfrak{j} + h\,\mathfrak{k}$$
$$\overrightarrow{AB} = a\,\mathfrak{j}$$
$$\overrightarrow{BS} = -\frac{a}{6}\sqrt{3}\,\mathfrak{i} - \frac{a}{2}\,\mathfrak{j} + h\,\mathfrak{k}$$
$$\overrightarrow{BC} = -\frac{a}{2}\sqrt{3}\,\mathfrak{i} - \frac{a}{2}\,\mathfrak{j}$$

Man erhält:

$$\overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ -\frac{a}{6}\sqrt{3} & \frac{a}{2} & h \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = -a\,h\,\mathfrak{i} - \frac{a^2}{6}\sqrt{3}\,\mathfrak{k}$$

und

$$\overrightarrow{BS} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ -\frac{a}{6}\sqrt{3} & -\frac{a}{2} & h \\ -\frac{a}{2}\sqrt{3} & -\frac{a}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a \cdot h}{2}\,\mathfrak{i} - \frac{ah}{2}\sqrt{3}\,\mathfrak{j} - \frac{a^2}{6}\sqrt{3}\,\mathfrak{k},$$

also

$$(\overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{BS} \times \overrightarrow{BC}) = -\frac{a^2\,h^2}{2} + \frac{a^4}{12}$$

Gleichung (1) lautet dann:

$$\frac{a^2\,h^2}{2} - \frac{a^4}{12} = 0.$$

Daraus erhält man

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{6}\sqrt{6} \approx 0{,}408.$$

3. Für alle reellen Zahlen x gilt **8 Punkte**

$$x^{12}+1=(x^4+1)\ (x^8-x^4+1)=(x^4+2x^2+1-2x^2)(x^8+2x^4+1-3x^4)$$

$$=\left[(x^2+1)^2-2x^2\right]\ \cdot\ \left[(x^4+1)^2-3x^4\right]$$

$$=\ (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^4+1+\sqrt{3}x^2)(x^4+1-\sqrt{3}x^2).$$

Ferner gilt

$$x^4+1+\sqrt{3}x^2=x^4+2x^2+1-(2-\sqrt{3})x^2=(x^2+1)^2-(2-\sqrt{3})x^2$$

$$=(x^2+1+\sqrt{2-\sqrt{3}}x)(x^2+1-\sqrt{2-\sqrt{3}}x)$$

und analog

$$x^4+1-\sqrt{3}x^2=(x^2+1+\sqrt{2+\sqrt{3}}x)(x^2+1-\sqrt{2+\sqrt{3}}x).$$

Man erhält daher

$$x^{12}+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2-\sqrt{3}}x+1)$$

$$\cdot(x^2-\sqrt{2-\sqrt{3}}x+1)(x^2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\ x+1)(x^2-\sqrt{2+\sqrt{3}}x+1)$$

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

6 Punkte

4. Wir setzen

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)=x^4-2x^3-13x^2+14x+24\ , \qquad (1)$$

$$g(x)=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)=x^4+2x^3-13x^2-14x+24. \qquad (2)$$

Die gegebene Gleichung ist genau für alle diejenigen x erfüllt, für die $|f(x)| = |g(x)|$, also entweder $f(x)=g(x)$ oder $f(x) = -g(x)$ ist.

a) Es sei $f(x) = g(x)$ zu lösen. Nach (1) und (2) ist dies äquivalent mit

$$2 \cdot 2x^3 - 2 \cdot 14x = 0,$$

$$x(x^2-7) = 0.$$

Diese Gleichung hat genau die Lösungen

$$x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{7},\ x_3 = -\sqrt{7}.$$

b) Es sei $f(x) = -g(x)$ zu lösen. Nach (1) und (2) ist dies äquivalent mit

$$2x^4 - 2 \cdot 13x^2 + 2 \cdot 24 = 0$$

$$x^4 - 13x^2 + 24 = 0$$

$$\left(x^2 - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{73}{4} = 0$$

$$\left(x^2 - \frac{13+\sqrt{73}}{2}\right)\left(x^2 - \frac{13-\sqrt{73}}{2}\right) = 0.$$

Diese Gleichung hat genau die Lösungen

$$x_4 = \frac{1}{2}\sqrt{26+2\sqrt{73}},\quad x_5 = -\frac{1}{2}\sqrt{26+2\sqrt{73}},$$

$$x_6 = \frac{1}{2}\sqrt{26-2\sqrt{73}},\quad x_7 = -\frac{1}{2}\sqrt{26-2\sqrt{73}}\ .$$

Da wir nur äquivalente Umformungen durchgeführt haben, hat die gegebene Gleichung genau 7 reelle Lösungen, nämlich die oben angegebenen Zahlen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \ .$$

5. Die Behauptung ist äquivalent mit den folgenden Behauptungen: 6 Punkte

$$\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} < 2\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{2} + 1) < 2\sqrt[3]{3}$$

$$2\cdot(3 + 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}) < 8\cdot 3$$

$$1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} < 4$$

Die Richtigkeit der letzten Ungleichung nun läßt sich, ohne die Wurzeln auszurechnen, elementar z. B. auf folgende Weise nachweisen: Angenommen, die Ungleichung wäre falsch. Hieraus folgte

(1) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \geqq 3$

$$\sqrt[3]{4} \geqq 3 - \sqrt[3]{2}$$

$$4 \geqq 27 - 27\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{4} - 2$$

(2) $9\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{4} \geqq 7.$

Nun folgt aus (1) nach Multiplikation mit 3

$3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} \geqq 9$ (3),

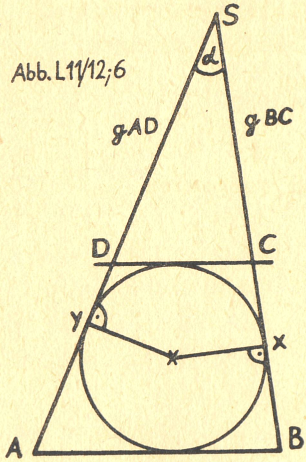
also aus (2) und (3) nach Addition

$$12\sqrt[3]{2} \geqq 16$$

$$3\sqrt[3]{2} \geqq 4$$

$$54 \geqq 64,$$

womit man zu einem Widerspruch gelangt ist.

6. 

Die parallelen Seiten des Trapezes ABCD (siehe Abb. L 11/12;6) seien die Seiten AB und CD mit $\overline{AB} = a$ und $\overline{CD} = b$. S sei der Schnittpunkt der Geraden g_{BC} und g_{AD}; X und Y seien die Berührungspunkte des Inkreises des Trapezes mit den Seiten BC und DA; d sei die Länge des Inkreisdurchmessers; u_1 sei der Umfang des Dreiecks $\triangle$ ABS; u_2 sei der Umfang des Dreiecks $\triangle$ DCS. 8 Punkte

Dann gilt:

$$u_1 = a + (\overline{SY} + \overline{SX}) + (\overline{YA} + \overline{YB}),$$

$$u_2 = b + (\overline{SY} + \overline{SX}) - (\overline{YD} + \overline{XC}).$$

Da $\overline{SY} = \overline{SX} = \frac{d}{2} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$,

$\overline{YA} + \overline{XB} = \overline{AB} = a$ und

$\overline{YD} + \overline{XC} = \overline{DC} = b$ gilt, ist

$$u_1 = d \cdot \cot \frac{\alpha}{2} + 2\,a \text{ und}$$

$$u_2 = d \cdot \cot \frac{\alpha}{2}.$$

Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $\triangle$ ABS und $\triangle$ DCS gilt

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{a}{b};$$

daraus folgt

$$\frac{d \cot \frac{\alpha}{2} + 2a}{d \cot \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{b}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$d = \frac{2\,ab}{a-b} \tan \frac{\alpha}{2}.$$