VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. a) Beweisen Sie, daß für jedes Dreieck der folgende Satz gilt: Das Produkt der Längen a und b zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Produkt aus der Länge h der der dritten Dreiecksseite zugeordneten Höhe und der Länge d des Umkreisdurchmessers dieses Dreiecks.

   b) Folgern Sie aus diesem Satz die Beziehung

   $F = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot d}$, wobei F der Flächeninhalt des Dreiecks und c die Länge der dritten Dreiecksseite sind!

2. Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $a \neq b$ und $ab > 0$. Man untersuche, ob für $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ der Ausdruck

$$s = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$ existiert!

Ist dies der Fall, so drücke man s weitgehend vereinfacht durch a und b aus, in diesem Falle rational!

3. In einer Ebene ε sei k ein Kreis mit gegebenem Radius r; ferner sei eine natürliche Zahl $n \geqq 2$ gegeben. Ein Durchmesser PQ von k werde in n gleiche Teile geteilt; die Teilpunkte seien $R_1, \ldots, R_{n-1}$, so daß $\overline{PR_1} = \overline{R_1R_2} = \ldots = \overline{R_{n-2}R_{n-1}} = \overline{R_{n-1}Q}$ gilt. Eine der beiden Halbebenen, in die ε durch die Gerade g_{PQ} zerlegt wird, sei H genannt, die andere H'. Dann sei c_i der in H gelegene Halbkreis über PR_i, ferner c_i' der in H' gelegene Halbkreis über R_iQ, sowie schließlich b_i die aus c_i und c_i' zusammengesetzte Kurve $(i=1,\ldots,n-1)$.
Man berechne die Inhalte der Flächenstücke, in die die Kreisfläche durch je zwei benachbarte Kurven $b_1,\ldots,b_{n-1}$ bzw. durch b_1 bzw. b_{n-1} und den jeweiligen Halbkreis (siehe Abb. A10;3) zerlegt wird!

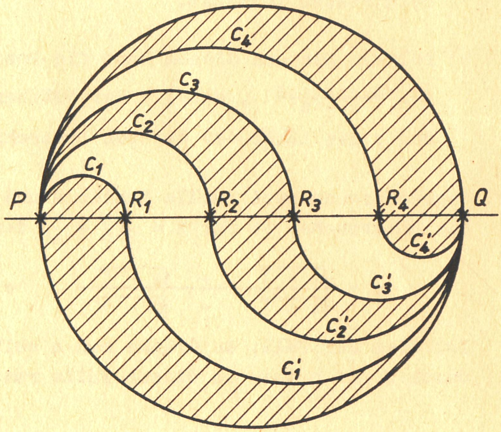


Abb. A 10;3

A 10;II

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

4. Im Innern eines Quadrates ABCD mit der Seitenlänge a seien 288 Punkte gelegen. Es soll eine Anzahl von Parallelen zu AB derart gezogen werden, daß auf ihnen durch die Strecken AD und BC jeweils (zu AB parallele) Strecken abgeschnitten werden. Ferner soll von jedem der 288 Punkte auf genau eine der Parallelen das Lot gefällt werden.
Man beweise: Bei jeder Verteilung der 288 Punkte im Innern des Quadrates ist es möglich, die Parallelen und die Lote so zu wählen, daß die Summe L der Längen aller dieser Parallelstrecken und aller dieser Lote kleiner als 24a wird.

5. Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$4 \cdot \log_4 x + 3 = 2 \cdot \log_x 2 \qquad \text{erfüllen!}$$

6. Die Abbildung A 10;6 zeigt einen Würfel W = ABCDEFGH mit der Kantenlänge a. In den Seitenflächen ABCD, ABFE, ADHE, BCGF, DCGH, EFGH von W sind kantenparallele Quadrate $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2F_2E_2$, $A_3D_3H_3E_3$, $B_4C_4G_4F_4$, $D_5C_5G_5H_5$, $E_6F_6G_6H_6$ einer Kantenlänge $x < a$ und mit den Mittelpunkten $M_1, \ldots, M_6$ gelegen

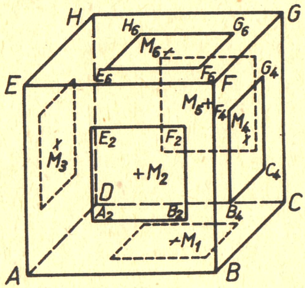


Abb.
A 10;6

und zwar so, daß die drei Geraden $g_{M_1M_6}$, $g_{M_2M_5}$, $g_{M_3M_4}$ kantenparallel verlaufen und sich in einem und demselben Punkt schneiden.

Aus W werden nun die drei Quader $A_1B_1C_1D_1E_6F_6G_6H_6$, $A_2B_2F_2E_2D_5C_5G_5H_5$, $A_3D_3H_3E_3B_4C_4G_4F_4$ herausgeschnitten.

Für welchen Wert von x hat der entstehende Restkörper das halbe Volumen des ursprünglichen Würfels?

Bestell-Nr. 30 04 05-1

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

1. a) Im Dreieck $\triangle ABC$ sei H der Fußpunkt des Lotes von C auf die Gerade durch A und B. Der durch C gehende Durchmesser des Umkreises des Dreiecks $\triangle$ ABC schneide diesen im Punkt D. 5 Punkte

Es gelte $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = c$, $\overline{CH} = h$, $\overline{CD} = d$.

Da die zu beweisende Aussage sich nicht ändert, wenn man A mit B vertauscht, so kann (eventuell durch eine solche Vertauschung) $\overline{\sphericalangle ABC} < 90^\circ$ erreicht werden.*)

Dann ist $D \neq A$; ferner $H \neq B$, und zwar liegen A und H auf demselben von B ausgehenden Strahl. Nach dem Satz über die Peripheriewinkel über demselben Bogen ($\overset{\frown}{AC}$) folgt daher

$\overline{\sphericalangle HBC} = \overline{\sphericalangle ADC}$.

Ferner ist nach Definition der Höhe und nach dem Satz des Thales

$\overline{\sphericalangle BHC} = \overline{\sphericalangle DAC} = 90^\circ$

Daraus folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle BHC \sim \triangle DAC$ und damit $a:h=d:b$, also $ab=hd$.

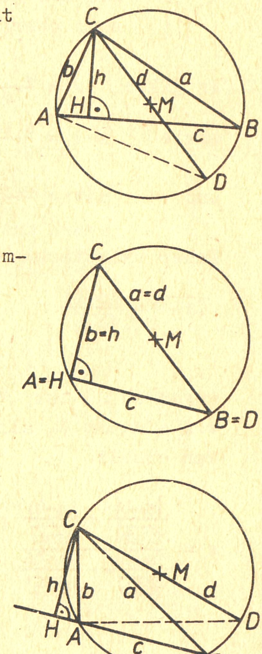


Abb. L 10;1

---

*) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bedeutet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$

b) Nach a) gilt 2 Punkte

$$h = \frac{a \cdot b}{d}$$

Nun ist der Flächeninhalt F des Dreiecks $\triangle ABC$

$$F = \frac{1}{2} c \cdot h$$

Mithin erhält man

$$F = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot d} .$$

zusammen 7 Punkte

Anmerkung: Der Beweis für a) kann auch mit Hilfe von Fallunterscheidungen geführt werden. Für a=b geht die Aussage in den Kathetensatz über: $a^2 = d \cdot h$.

2. Es gilt: $x = \dfrac{a^2 + b^2}{2ab}$ 7 Punkte

sowie $x-1 = \dfrac{a^2+b^2-2ab}{2ab} = \dfrac{(a-b)^2}{2ab} \geqq 0$

und $x+1 = \dfrac{a^2+b^2+2ab}{2ab} = \dfrac{(a+b)^2}{2ab} \geqq 0.$

Daher existieren $\sqrt{x+1}$ und $\sqrt{x-1}$, und zwar gilt

$$\sqrt{x+1} = \frac{|a+b|}{\sqrt{2ab}} , \qquad \sqrt{x-1} = \frac{|a-b|}{\sqrt{2ab}} .$$

Wegen $ab > 0$ ist $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$ und damit der Nenner von s nicht 0, also existiert s.
Man erhält

$$s = \frac{\dfrac{|a+b|}{\sqrt{2ab}} + \dfrac{|a-b|}{\sqrt{2ab}}}{\dfrac{|a+b|}{\sqrt{2ab}} - \dfrac{|a-b|}{\sqrt{2ab}}} = \frac{|a+b| + |a-b|}{|a+b| - |a-b|}$$

Nun sind auf Grund der Voraussetzungen $a \neq b$, $ab > 0$ nur die folgenden Fälle möglich:

Fall 1: $0 < a < b$.

Dann gilt $s = \frac{a+b+b-a}{a+b-b+a} = \frac{b}{a}$.

Fall 2: $0 < b < a$.

Dann gilt $s = \frac{a+b+a-b}{a+b-a+b} = \frac{a}{b}$.

Fall 3: $b < a < 0$.

Dann gilt $s = \frac{-a-b+a-b}{-a-b-a+b} = \frac{b}{a}$.

Fall 4: $a < b < 0$.

Dann gilt $s = \frac{-a-b+b-a}{-a-b-b+a} = \frac{a}{b}$.

3. Für jedes $i = 1,\ldots,n$ gilt: c_i und c'_{n-i} haben beide den Durchmesser $d_i = i \cdot \frac{2r}{n}$; der Flächeninhalt der von je einem dieser Halbkreise und dem zugehörigen Durchmesserabschnitt begrenzten Fläche ist daher $A_i = \frac{\pi}{2} \cdot i^2 \frac{r^2}{n^2}$. — 6 Punkte

Setzt man noch $A_o = 0$ und $A_n = \frac{\pi}{2} r^2$, so sind die gesuchten Flächeninhalte

$$
\begin{aligned}
F_i &= A_i - A_{i-1} + A_{n-(i-1)} - A_{n-i} \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{n^2} \left\{ i^2 - (i-1)^2 + [n-(i-1)]^2 - (n-i)^2 \right\} \\
&= \frac{\pi r^2}{2n^2} \left[2i - 1 + 2(n-i) + 1 \right] \\
&= \frac{\pi r^2}{2n^2} \cdot 2n = \underline{\underline{\frac{1}{n} \pi r^2}}
\end{aligned}
$$

Die n Flächenstücke sind also untereinander inhaltsgleich.

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

4. Es sei eine Verteilung der 288 Punkte im Innern des Quadrates gegeben. Wir treffen zunächst für jede positive ganze Zahl n die folgende Wahl der Parallelen und Lote: 8 Punkte

Man trage auf AD von A aus eine Strecke der Länge $\frac{a}{2n}$, daran anschließend (n-1) mal hintereinander Strecken der Länge $\frac{a}{n}$ und daran anschließend eine Strecke der Länge $\frac{a}{2n}$ ab. Der Endpunkt der letzten Teilstrecke fällt mit D zusammen, da

$$2 \cdot \frac{a}{2n} + (n-1)\frac{a}{n} = a \quad \text{ist.}$$

Durch die zwischen A und D liegenden Teilpunkte ziehe man Parallelen zu AB.

Sodann fälle man von jedem der 288 Punkte das Lot auf diejenige Parallele, von der er den kleinsten Abstand hat, bzw. falls er in der Mitte zwischen zwei Parallelen liegt, das Lot auf eine der beiden. Bei dieser Wahl der Parallelen und Lote kann keines dieser Lote länger als $\frac{a}{2n}$ sein.

Für die Summe L_1 der Längen dieser Lote gilt also

$$L_1 \leqq 288 \cdot \frac{a}{2n} = \frac{144a}{n} \text{ , und das Gleichheitszeichen}$$

gilt genau dann, wenn jedes der Lote die Länge $\frac{a}{2n}$ hat.

Da die Summe L_2 der Längen der Parallelstrecken im Innern des Quadrates $L_2 = a \cdot n$ ist, erhält man

$$L = L_1 + L_2 \leqq \frac{144a}{n} + an$$

$$\leqq a\left(\frac{n^2+144}{n}\right) = a\left(\frac{n^2-24n+144}{n} + \frac{24n}{n}\right)$$

$$\leqq a\left[\frac{(n-12)^2}{n} + 24\right].$$

Ist nun $n = 12$, so folgt $L \leqq 24a$.
Gilt hierbei sogar $L < 24a$, so ist eine in der Aufgabenstellung verlangte Wahl der Parallelen und Lote gefunden. Gilt aber $L = 24a$, so hat jedes der Lote die Länge $\frac{a}{2n}$. In diesem Falle liegen alle 288 Punkte auf den 11 Parallelen zu AB durch diejenigen Punkte, die AD in 12 gleiche Teile zerlegen. Man erhält daher im vorliegenden Falle eine der Aufgabenstellung entsprechende Wahl der Parallelen und Lote, wenn man diese 11 Parallelen wählt, und alle Lote von der Länge 0.

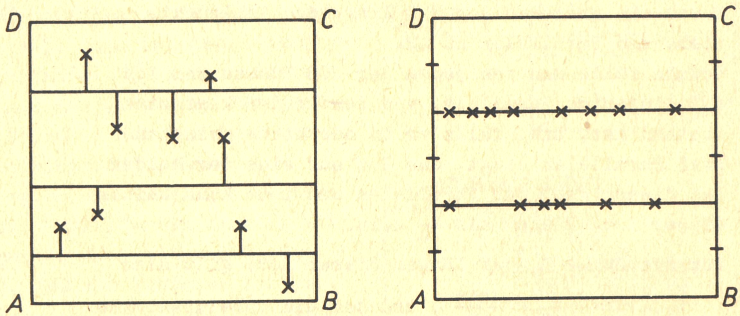


Abb. L 10;4

5. Angenommen, es existiert eine Lösung. Für diese erhält man dann 6 Punkte

(1) $x > 0$, da für sie $\log_4 x$ existiert. Ferner folgt

wegen $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ mit $a>0$, $b>0$

$\frac{4}{\log_x 4} + 3 = 2\cdot\log_x 2$ und wegen $\log_x 4 = 2\cdot\log_x 2$

$\frac{2}{\log_x 2} + 3 = 2\cdot\log_x 2$.

Setzt man $u = \log_x 2$, so erfüllt u folglich die quadratische Gleichung $u^2 - \frac{3}{2}u - 1 = 0$ mit genau den beiden Lösungen $u_1 = 2$ und $u_2 = -\frac{1}{2}$.
Aus $u = \log_x 2$ folgt $x^u = 2$. Die Gleichung $x^{u_1} = 2$ hat nur die Lösungen $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, die Gleichung $x^{u_2} = 2$ hat nur die Lösung $x_3 = \frac{1}{4}$.
Wegen (1) ist x_2 keine Lösung der gegebenen Gleichung. Die Proben mit x_1 und x_3 zeigen, daß x_1 und x_3 die gegebene Gleichung erfüllen.

6. Das Volumen des aus dem Würfel herausgeschnittenen Körpers ist gleich der Differenz aus dem dreifachen Volumen eines der Quader und dem doppelten Volumen eines Würfels der Kantenlänge x. Daher ist eine Zahl x genau dann Lösung der Aufgabe, wenn für sie $0<x<a$ und $3ax^2 - 2x^3 = \frac{1}{2}a^3$, d. h. 6 Punkte

$$x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + \frac{1}{4}a^3 = 0 \text{ gilt.}$$

Gelingt es, eine Lösung dieser kubischen Gleichung durch Probieren zu finden, so lassen sich die beiden anderen berechnen. Auf Grund der Aufgabenstellung bietet sich $x = \frac{a}{2}$ für eine Probe an. Tatsächlich ist

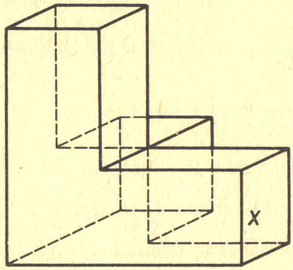
$$\frac{1}{8}a^3 - \frac{3}{8}a^3 + \frac{1}{4}a^3 = 0$$

und damit $x_1 = \frac{a}{2}$ eine Lösung.

Da $(x^3-\frac{3}{2}ax^2+\frac{1}{4}a^3):(x-\frac{a}{2})=x^2-ax-\frac{a^2}{2}$ ist, können weitere Lösungen der Aufgabe nur solche Zahlen sein, die der quadratischen Gleichung

$$x^2-ax-\frac{a^2}{2} = 0 \quad \text{genügen.}$$

①



Deren sämtliche Lösungen sind

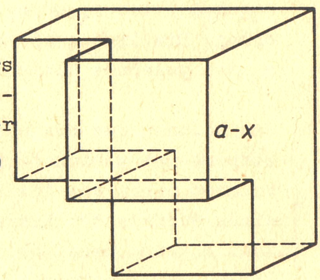
$$x_2 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Wegen $x_2>a$ und $x_3<0$ sind x_2 und x_3 keine Lösungen der gestellten Aufgabe. Also ist $x_1 = \frac{a}{2}$ einzige Lösung. Die kantenparallelen Quadrate haben Seiten, die halb so lang wie die Würfelkanten sind.

<u>Zweite Lösung:</u>

Das Volumen des herausgeschnittenen Körpers ändert sich nicht, wenn man durch Abschneiden und Wiederanfügen geeigneter Teilquader die in ① skizzierte Gestalt erreicht ($A_1=A_2=A_3=A$). Dann ist der Restkörper ebenso gestaltet ②, nur mit der Kantenlänge a-x (statt x) der quadratischen Grundflächen der drei einander durchdringenden Quader.

②



Ferner ergibt ein Vergleich zweier Körper der betreffenden Gestalt mit den genannten Kantenlängen x_1, x_2 $(0<x_i<a)$, daß zur größeren Kantenlänge auch das größere Volumen gehört ③.

Aus der Aufgabenstellung (Volumen des herausgeschnittenen Körpers gleich Volumen des Restkörpers) ergibt sich somit $x=a-x$, also $x=\frac{a}{2}$ als einzige Lösung.

③

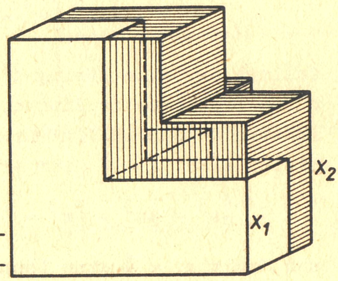


Abb. L 10;4