A 10;I VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Im Dreieck $\triangle ABC$ sei $\overline{AB} = 18$ cm. Zu dieser Seite werde im Innern dieses Dreiecks eine Parallele gezogen, so daß ein Trapez ABDE entsteht, dessen Flächeninhalt F_2 ein Drittel des Flächeninhalts F_1 des Dreiecks $\triangle ABC$ ist. Berechnen Sie die Länge der Seite DE des Trapezes!

2. Die fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen 10, 11, 12, 13 und 14 haben die Eigenschaft, daß die Summe der Quadrate der ersten drei dieser Zahlen gleich der Summe der Quadrate der beiden letzten Zahlen ist. Es gilt also

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 .$$

a) Gibt es noch andere fünf aufeinanderfolgende ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft?

b) Gegeben sei eine positive ganze Zahl n. Ermitteln Sie alle Zusammenstellungen von $2n + 1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, für die die Summe der Quadrate der ersten $n + 1$ Zahlen gleich der Summe der Quadrate der letzten n Zahlen ist:

α) für $n = 3$!

β) für beliebiges positives ganzes n !

X 3. Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b mit $a > b$ und $a^2 + b^2 = 6 \cdot ab$ stets

$$\lg (a + b) - \lg(a - b) = \frac{1}{2} \lg 2 \text{ gilt!}$$

30 03 76-1

A 10;II VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

4. Eine quadratische Funktion der Form $y = x^2 + px + q$ wird im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt. Die Schnittpunkte des Bildes der Funktion mit der Abszissenachse begrenzen auf dieser eine Strecke mit der Länge 7 Längeneinheiten. Das Bild der Funktion schneidet die Ordinatenachse im Punkt S_y (0;8).
Ermitteln Sie die reellen Zahlen p und q!

5. Beweisen Sie folgende Behauptung:
Zeichnet man in einem Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen und legt an ihren Endpunkten Tangenten an den Kreis, so ist das entstehende Tangentenviereck gleichzeitig auch ein Sehnenviereck.

6. Beweisen Sie die folgende Behauptung:
Wenn p und q Primzahlen sind ($p > 3$, $q > 3$), dann ist $p^2 - q^2$ ein Vielfaches von 24.

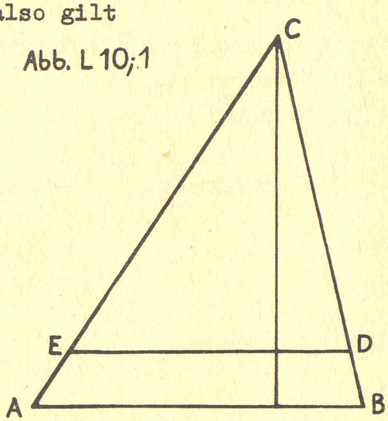
L 10;I

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1\. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle EDC$ sind ähnlich, da sie in den Winkeln übereinstimmen. Das Dreieck $\triangle EDC$ hat den Flächeninhalt $F_3 = F_1 - \frac{1}{3} F_1$, also gilt — 5 Punkte

Abb. L 10;1



$$\frac{F_3}{F_1} = \frac{2}{3}$$

Da sich die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate homologer Seiten verhalten, folgt hieraus

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \text{ also } \overline{DE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot 18 \text{ cm} = 6\sqrt{6} \text{ cm}.$$

2\. b) I) Angenommen, es gebe $2n + 1$ Zahlen der gesuchten Art. Bezeichnen wir die $(n + 1)$-te dieser Zahlen mit x, so lauten sie $x - n$, $x - n + 1, \ldots, x, \ldots, x + n$ und erfüllen die Gleichung

Für b; α 2 Punkte
Für b; β 4 Punkte

(1) $(x-n)^2+\ldots+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+\ldots+(x+n)^2$.

Wegen $(x+k)^2-(x-k)^2= 4kx \; (k = 1,\ldots,n)$ folgt aus (1)

$x^2 = 4(1 + \ldots+n)x = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot x$, also

(2) $x(x - 2n\,(n+ 1)) = 0$.

Daher muß $x = 0$ oder $x = 2n(n+1) = 2n^2+2n$ sein,

30 03 76-1

d.h. es kommen nur die Zusammenstellungen

(3) $-n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, n$

(4) $2n^2+n, 2n^2+n+1, \ldots, 2n^2+2n, \ldots, 2n^2+3n$ als Lösungen in Frage.

II) In der Tat erfüllen (3) und (4) die Bedingungen der Aufgabe; denn sowohl für $x = 0$ als auch für $x = 2n(n+1)$ ist (2) erfüllt, woraus man umgekehrt wie in I) auf (1) schließen kann.

a) Setzt man in b) speziell $n = 2$, so entsteht a). 2 Punkte
Man erhält hierfür aus (4) die bereits genannten Zahlen $10, \ldots, 14$, aus (3) die somit einzige weitere Lösung $-2, \ldots, 2$.

zusammen 8 Punkte

3. Aus $a^2 + b^2 = 6ab$ folgt 6 Punkte

$$a^2 + 2ab + b^2 = 8ab$$

$$(a + b)^2 = (\sqrt{8ab})^2,$$ also, da wegen $a, b > 0$ sicher $a + b > 0$ ist,

$$a + b = \sqrt{8ab}$$

Aus $a^2 + b^2 = 6ab$ folgt

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4ab$$

$$(a - b)^2 = 4ab,$$ also, da wegen $a > b$ sicher $a - b > 0$ ist,

$$a - b = \sqrt{4ab}\ .$$

Also ist

$$\frac{a + b}{a - b} = \sqrt{\frac{8ab}{4ab}} = \sqrt{2}\ .$$

Durch Logarithmieren erhält man

$$\lg (a + b) - \lg (a - b) = \frac{1}{2} \lg 2.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

4. I. S_y ist genau dann ein Punkt der entstehenden Parabel, wenn seine Koordinaten deren Gleichung erfüllen. Hierfür ist $8 = q$ notwendig und hinreichend. 6 Punkte

II. Sei nunmehr $q = 8$ vorausgesetzt.
Die Abszissen der Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 + px + 8 = 0$.
Für sie erhält man

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 8} = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 32}$$

und $$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 8} = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 32}$$

(vorausgesetzt, daß $|p| \geqq 4\sqrt{2}$ ist; anderenfalls hat die Parabel keinen Punkt auf der x-Achse)

Die Bedingung $x_1 - x_2 = 7$ ist somit gleichbedeutend mit $\sqrt{p^2 - 32} = 7$, dies mit

$$p^2 - 32 = 49, \text{ d. h. mit}$$

$$p^2 = 81,$$

und dies damit, daß entweder $p = 9$ oder $p = -9$ gilt.

Hat man statt der bisher genannten logischen Äquivalenzen nur in einer Richtung (zu $q = 8$ und zu $p = 9$ oder $p = -9$ hin) führende Schlüsse geschrieben, so eignet sich zum dann erforderlichen Nachweis der Umkehrung auch folgende Probe:

Das Bild der quadratischen Funktion $y = x^2 - 9x + 8 = (x - 1)(x - 8)$ schneidet die x-Achse in den Punkten $S_1(8;0)$ und $S_2(1;0)$, die y-Achse im Punkt $S_y(0;8)$.

Das Bild der quadratischen Funktion $y = x^2+9x+8$
$=(x+1)\cdot(x+8)$
schneidet die x-Achse in den Punkten $S_3(-1;0)$ und $S_4(-8;0)$, die y-Achse im Punkt $S_y(0;8)$.

5. Es gilt der Satz: 7 Punkte

Beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel eines Vierecks 180°, so ist das Viereck ein Sehnenviereck.

M sei der Mittelpunkt eines Kreises, KG und LH seien zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen dieses Kreises. Die in ihren Endpunkten an den Kreis gelegten benachbarten Tangenten mögen sich in den Punkten A, B, C, D schneiden, so daß G, H, K, L in dieser Reihenfolge auf AB, BC, CD, DA liegen.

Da KG und LH aufeinander senkrecht stehen, ist

$$\overline{\sphericalangle KGH} + \overline{\sphericalangle GHL} = 90^\circ \ .^{*)}$$

Durch Übergang zu den Zentriwinkeln folgt

$$\overline{\sphericalangle KMH} + \overline{\sphericalangle GML} = 180^\circ \ .$$

Ersetzt man hierin links jeden Summanden durch seine Ergänzung zu 180°, so folgt (da die Summe eben 180° betrug) wieder $\overline{\sphericalangle KCH} + \overline{\sphericalangle GAL} = 180^\circ$. Nach dem eingangs erwähnten Satz folgt hieraus die Behauptung.

---

*) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$

6. Es gilt mit geeigneten natürlichen Zahlen r und s: 8 Punkte

$p = 2r + 1$

$q = 2s + 1$.

Daraus folgt:

$p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) = 4(r-s)(r+s+1)$

Von den Zahlen $r - s$ und $r + s + 1$ ist genau eine durch 2 teilbar, da ihre Summe ungerade ist.

Daher ist

$p^2 - q^2$ durch 8 teilbar.

Andererseits gilt mit geeigneten natürlichen Zahlen x und y

$p = 3x + 1$ oder $p = 3x - 1$

und

$q = 3y + 1$ oder $q = 3y - 1$.

Es gibt daher genau die folgenden Möglichkeiten:

(1) $p = 3x + 1$ und $q = 3y + 1$

(2) $p = 3x - 1$ und $q = 3y - 1$

(3) $p = 3x + 1$ und $q = 3y - 1$

(4) $p = 3x - 1$ und $q = 3y + 1$

Für (1) und (2) gilt: $p - q = 3\,(x-y)$

Für (3) und (4) gilt: $p + q = 3\,(x+y)$

Da $p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$ gilt, ist somit in jedem Falle $p^2 - q^2$ durch 3 teilbar.

Wegen $(8,3) = 1$ ist folglich $p^2 - q^2$ auch stets durch 24 teilbar.

<u>2. Lösungsweg:</u>

Mit geeigneten natürlichen Zahlen m, n ist $p = 6m \pm 1$ und $q = 6n \pm 1$ (wobei für p und q voneinander unabhängig je eines der Vorzeichen gilt), also

(5) $p^2 - q^2 = 12 \cdot (m(3m \pm 1) - n(3n \pm 1)$.

In den Produkten $m(3m \pm 1)$, $n(3n \pm 1)$ ist für $\begin{matrix}\text{gerades}\\\text{ungerades}\end{matrix}$ m bzw. n der $\begin{matrix}\text{erste}\\\text{zweite}\end{matrix}$ Faktor gerade; daher sind diese Produkte stets gerade, also auch ihre Differenz. Hiernach folgt aus (5) die Behauptung.