Vorlauf

L 10

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Angenommen, $\{a_1, a_2, \ldots\}$ sei eine Folge der gesuchten Art. Dann ergibt sich aus der Forderung an S_n für $n = 1$ und $n = 2$: 8 Punkte

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = a_1 = 1 + 5 = 6 \\ S_2 = a_1+a_2=4+10 = 14 \end{array}\right\} \text{ also } \left\{\begin{array}{l} a_1 = 6 \\ a_2 = 14 - 6 = 8 \end{array}\right.$$

Daher muß das Anfangsglied $a_1 = 6$ und die (für alle $n = 1, 2, \ldots$ gleichlautende) Differenz $d = a_{n+1} - a_n = 2$ sein.

Umgekehrt, für die arithmetische Folge mit $a_1 = 6$ und $d = 2$ gilt

$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 6 + 2n - 2 = 2n + 4$, also in der Tat

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(6+2n+4) = \frac{n}{2}(2n+10) = n^2 + 5n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

2. Genügt x der geforderten Bedingung, so setzen wir 9 Punkte

$\log_2 (\log_2 x) = a$ und erhalten

$\log_2 a = 0$

Das bedeutet $2^0 = a$.
also $a = 1$.

Damit ist $\log_2 (\log_2 x) = 1$.

Wir setzen $\log_2 x = b$ und erhalten

$\log_2 b = 1$.

Das bedeutet $2^1 = b$,
also $b = 2$.

30 03 75-1

Damit ist $\log_2 x = 2$.

Das bedeutet $2^2 = x$,

also muß $\underline{x = 4}$ sein, wenn es der geforderten Bedingung genügen soll.

Probe: Wegen $\log_2 4 = 2$ und

$\log_2 2 = 1$ und

$\log_2 1 = 0$ folgt

$$\log_2 (\log_2 (\log_2 4)) = \log_2 (\log_2 2)$$
$$= \log_2 1$$
$$= 0,$$ so daß $x = 4$ tatsächlich Lösung der Aufgabe, und zwar die einzige, ist.

3. Beweis: P sei ein innerer Punkt eines gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$, und V_1, V_2, V_3 seien drei Punkte, in dieser Reihenfolge auf den Dreiecksseiten AB, BC, CA gelegen. — 11 Punkte

Wir setzen $\overline{PV_n} = v_n$ $(n = 1, 2, 3)$.

Fällt man von P die Lote auf die 3 Dreiecksseiten, deren Fußpunkte L_1, L_2, L_3 seien, und bezeichnet man die Längen dieser Lote mit l_1, l_2, l_3, so gilt

$$v_n \geqq l_n \qquad (n = 1, 2, 3),$$

also

$$v_1 + v_2 + v_3 \geqq l_1 + l_2 + l_3. \qquad (1)$$

Sind ferner F, F_1, F_2, F_3 die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle APB$, $\triangle BPC$, $\triangle CPA$, so gilt

$$F = F_1 + F_2 + F_3.$$

d.h., wenn s die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks und h die Höhenlänge sind,

$$\frac{1}{2} s.h = \frac{1}{2} s \,.\, l_1 + \frac{1}{2} s.l_2 + \frac{1}{2} s \,.\, l_3 \,.$$

Hieraus folgt
$h = l_1 + l_2 + l_3$. (2)
Durch (1) und (2) ist die Aussage $h \leqq v_1 + v_2 + v_3$ bewiesen.

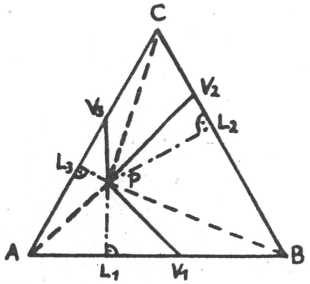

Abb. L10;3

4. I. Die Maßzahlen der Geschwindigkeiten (in $\frac{km}{h}$) der beiden Kraftwagen K_1, K_2 seien v_1, v_2; die Maßzahlen der Zeiten (in h), in denen sie die Strecke AB durchfahren, seien t_1, t_2. 12 Punkte

Dann gilt

(1) $210 = v_1 t_1 = v_2 t_2$.

Ferner ist sowhl $(t_1 - 2)$h als auch $(t_2 - \frac{9}{8})$ h die Zeit vom Fahrtbeginn bis zur Begegnung, so daß

(2) $t_1 = t_2 + \frac{7}{8}$

gelten muß. Schließlich ergibt sich die Entfernung vom Treffpunkt T nach B als $(v_1 \cdot 2)$ km und von T nach A als $(v_2 \cdot \frac{9}{8})$ km, woraus

(3) $v_1 \cdot 2 + v_2 \cdot \frac{9}{8} = 210$

folgt. Zur Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3) multipliziere man etwa (3) mit $t_1 t_2$ und berücksichtige anschließend (1) und (2). Es ergibt sich

$$210 \cdot t_2 \cdot 2 + 210 \cdot \left(t_2 + \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{9}{8}$$
$$= 210 \cdot \left(t_2 + \frac{7}{8}\right) \cdot t_2,$$

also

$$t_2^{\,2} - \frac{9}{4} t_2 - \frac{63}{64} = 0,$$

woraus man

$$t_{2_{1;2}} = \frac{9}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{81 + 63}$$

$$= \frac{9}{8} \pm \frac{12}{8} \quad \text{erhält.}$$

Davon ist allein $t_2 = \frac{21}{8}$ brauchbar, da $t_2 > 0$ gilt.
Nach (2) und (1) folgt hieraus weiter

$$t_1 = \frac{21}{8} + \frac{7}{8} = \frac{7}{2},$$

$$v_1 = \frac{210 \cdot 2}{7} = 60, \quad v_2 = \frac{210 \cdot 8}{21} = 80.$$

II. In der Tat erfüllen diese Werte die Bedingungen der Aufgabe: Nach der Zeit $(t_1 - 2)\,h = (t_2 - \frac{9}{8})\,h$

$$= \frac{3}{2}\,h$$

hat K_1 eine Strecke von $60 \cdot \frac{3}{2}$ km = 90 km zurückgelegt, K_2 eine von $80 \cdot \frac{3}{2}$ km = 120 km; wegen (90 + 120) km = 210 km begegnen sich K_1 und K_2 also zu diesem Zeitpunkt. Danach braucht K_1 für die restlichen 120 km eine Zeit von $\frac{120}{60}$ h = 2 h sowie K_2 für die restlichen 90 km eine Zeit von $\frac{90}{80}$ h = $\frac{9}{8}$ h.

Die Geschwindigkeiten der Kraftwagen betragen somit $60\ \frac{km}{h}$ und $80\ \frac{km}{h}$.