Kirchhoff

L 9;I

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe

1. Es sei y eine natürliche Zahl, für die $25 < y \leqq 50$ gilt. Die Ergänzung dieser Zahl bis 50 ist 6 Punkte
$x = 50 - y$, und es gilt:

$$y^2 = (50 - x)^2 = 2500 - 100x + x^2 = 100\,(25 - x) + x^2,$$

also wegen $x = 50 - y$

$$y^2 = 100\,(25 - 50 + y) + x^2 = 100\,(y - 25) + x^2.$$

Das heißt: Zu dem Quadrat x^2 der Ergänzung der gewählten Zahl y bis 50 ist das Hundertfache der Differenz $(y - 25)$ aus der gewählten Zahl und 25 zu addieren. Andererseits führt die von Marlies genannte Regel auf die Summe aus x^2 und dem Produkt von $(y - 25)$ mit derjenigen Zehnerpotenz, die der Stellenzahl des Quadrates x^2 entspricht. Daher ist diese Regel genau dann richtig, wenn das Quadrat x^2 eine zweistellige Zahl ergibt.

a) Für $41 \leqq y \leqq 46$ ist dies der Fall, dagegen nicht
b) für $26 \leqq y \leqq 40$ und
c) für $47 \leqq y \leqq 50$.

(Im Fall c) entsteht eine richtige Regel, wenn man in der durch Hintereinanderschreiben von $(y - 25)$ und x^2 gebildeten Zahl vor die letzte Stelle eine Ziffer 0 einschiebt, im Fall b), wenn man aus der gebildeten Zahl durch Addition der dritt- und viertletzten Stelle eine neue Zahl bildet, wobei eventuell auftretende Zehnerüberschreitungen wie üblich als Zehnerübertragung auf die vorangehende Stelle weiterwirken.)

2\. I. Angenommen, es gibt ein Dreieck $\triangle ABC$, das den genannten Bedingungen entspricht. — 1 Punkt

Der Punkt D liege

1) auf der Verlängerung von CA über A hinaus,
2) auf dem Kreis mit c um A.

Dann ist $\triangle DBA$ gleichschenklig.

Hiernach und nach dem Satz über die Außenwinkel im Dreieck (angewandt auf Dreieck $\triangle DBA$) gilt

$\overline{\sphericalangle BDA} = \overline{\sphericalangle ABD} = \frac{\alpha}{2}$. *)

II. Ein Dreieck $\triangle ABC$ entspricht daher nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann: — 2 Punkte

Man konstruiert ein Dreieck $\triangle CDB$ aus $\overline{CD} = b + c$, $\overline{BC} = a$ und $\overline{\sphericalangle CDB} = \frac{\alpha}{2}$. Im Punkte B trägt man an DB nach der Seite hin, auf der C liegt, den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ an, dessen freier Schenkel die Seite CD im Punkte A schneide.

III. Das Dreieck $\triangle ABC$ entspricht den Bedingungen. — 2 Punkte

Beweis: Laut Konstruktion ist $\overline{BC} = a$.

Ferner ist laut Konstruktion $\overline{\sphericalangle ADB} = \overline{\sphericalangle DBA} = \frac{\alpha}{2}$,

also nach dem Außenwinkelsatz $\overline{\sphericalangle BAC} = \alpha$.

Schließlich folgt, daß $\triangle ADB$ gleichschenklig mit $\overline{AD} = \overline{AB}$ ist und daß somit, da nach Konstruktion $\overline{CD} = b + c$ gilt, auch die Summe $\overline{AC} + \overline{AB}$ den vorgeschriebenen Wert $\overline{AC}+\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{AD}=\overline{CD}=a+c$ hat.

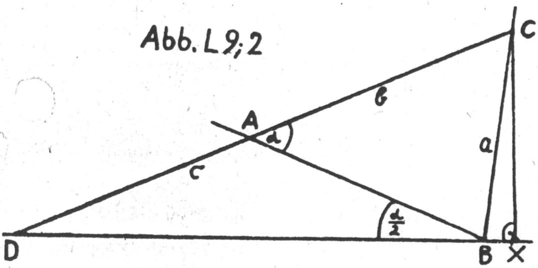
*) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$

IV. Die Konstruktion ist nicht möglich, wenn eine der Bedingungen 3 Punkte

$0^\circ < \alpha < 180^\circ$ und $b+c > a$

verletzt ist.

Abb. L9;2



Seien nun beide Bedingungen erfüllt. Da dann das Dreieck $\triangle CDB$ aus zwei Seiten und dem Winkel, der der kleineren gegenüberliegt, konstruiert wird, enthält man entweder überhaupt kein Dreieck oder genau ein Dreieck oder genau zwei verschiedene Dreiecke. Die Bedingungen dafür können von den Schülern dieser Klasse in etwa folgender Form angegeben werden: Man konstruiere das (bis auf Kongruenz eindeutig bestimmte) Dreieck $\triangle CDX$ mit $\overline{CD} = b + c$, $\overline{\sphericalangle CDX} = \frac{\alpha}{2}$, $\overline{\sphericalangle CXD} = 90^\circ$.

Dann ist die Konstruktion des gesuchten Dreiecks $\triangle ABC$

- nicht durchführbar, wenn $a < \overline{CX}$,
- bis auf Kongruenz - eindeutig durchführbar, wenn $a = \overline{CX}$
- bis auf Kongruenz - genau zweideutig durchführbar, wenn $a > \overline{CX}$ gilt.

zusammen 8 Punkte

3. Angenommen, es gibt ein solches Zahlentripel. 7 Punkte
Dann gilt:
(1) Durch Addition erhält man aus den vier Gleichungen:
$4\,a = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 10.$
Damit ist
$$a = \frac{5}{2}$$
(2) Durch Subtraktion erhält man aus der ersten und zweiten bzw. dritten und vierten Gleichung:
$2\,c = s_1 - s_2$
und
$2\,c = s_3 - s_4,$
also
$s_1 - s_2 = s_3 - s_4.$

Von den Gleichheitsaussagen dieser Form, in denen für s_1, s_2, s_3, s_4 bis auf die Reihenfolge genau die Zahlen 1, 2, 3, 4 stehen, sind (abgesehen von Seitenvertauschung) nur die folgenden wahr:
$$1 - 2 = 3 - 4$$
$$1 - 3 = 2 - 4$$
$$2 - 1 = 4 - 3$$
$$3 - 1 = 4 - 2$$
Daher kommen für 2 c nur die Werte -1, -2, 1 und 2 in Frage, und c kann nur $-\frac{1}{2}$, -1, $\frac{1}{2}$ und 1 sein.

(3) Aus der ersten und dritten bzw. zweiten und vierten Gleichung folgt wie in (2)
$$2\,b = s_1 - s_3$$
$$2\,b = s_2 - s_4,$$
und b kann ebenfalls nur die Werte $-\frac{1}{2}$, -1, $\frac{1}{2}$ und 1 annehmen.

(4) Da $a = \frac{5}{2}$ ist, können b und c nicht gleichzeitig ganze Zahlen sein; sonst wären die linken Seiten der gegebenen Gleichungen nicht ganzzahlig.

(5) Ferner können b und c nicht gleichzeitig je einer der angegebenen Brüche sein; sonst wäre die linke Seite einer der gegebenen Gleichungen die Summe $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, also nicht ganzzahlig.

Durch Kombination der gefundenen Werte von b und c und unter Berücksichtigung von (4) und (5) können höchstens die folgenden Zahlentripel Lösung sein:

$(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{5}{2}, -1, \frac{1}{2})$, $(\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2})$

$(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$, $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -1)$, $(\frac{5}{2}, -1, -\frac{1}{2})$, $(\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2})$

Durch Einsetzen überzeugt man sich, daß sie tatsächlich Lösungen sind.

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

4. In jedem gleichseitigen Dreieck fallen die Mittelpunkte von Inkreis (Schnittpunkt der Winkelhalbierenden) und Umkreis (Schnittpunkt der Mittelsenkrechten) zusammen. Dieser Mittelpunkt M ist zugleich auch der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Deshalb gilt (1) $\overline{MC} : \overline{MD} = 2 : 1$. $\overline{MC} = r_1$ ist der Radius des Umkreises, $\overline{MD} = r_2$ ist der Radius des Inkreises. — 5 Punkte

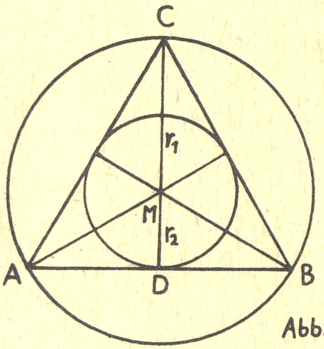


Abb. L9;4

Nach (1) ist damit $r_1 = 2\,r_2$
Für die Inhalte F_1 der Umkreisfläche und F_2 der Inkreisfläche gilt dann

$$F_1 = \pi r_1^2$$

und $$F_2 = \pi r_2^2 .$$

Wegen $r_1 = 2r_2$ folgt daraus

$$F_1 = 4\,F_2$$

Die Inhalte von In- und Umkreisfläche verhalten sich beim gleichseitigen Dreieck wie 1 : 4.

5. Die zu untersuchende Zahl ist **7 Punkte**

$$
\begin{aligned}
t &= n^8 (n^4 - 1) - (n^4 - 1) \\
&= (n^8 - 1)(n^4 - 1) \\
&= (n+1)^2(n-1)^2(n^2+1)^2(n^4+1) = ((n+1)(n-1))^2 \\
&\qquad \cdot (n^2+1)^2(n^4+1).
\end{aligned}
$$

Da n ungerade ist, so sind die zu n benachbarten Zahlen $(n+1)$ und $(n-1)$ beide gerade, und eine von ihnen ist durch 4 teilbar.
Demnach ist $(n+1)(n-1)$ durch 8 und das Quadrat dieser Zahl durch 64 teilbar.
n^2 und n^4 sind als Potenzen einer ungeraden Zahl ebenfalls ungerade, also ist

$(n^2 + 1)$ durch 2,
$(n^2 + 1)^2$ durch 4 und
$(n^4 + 1)$ durch 2 teilbar.

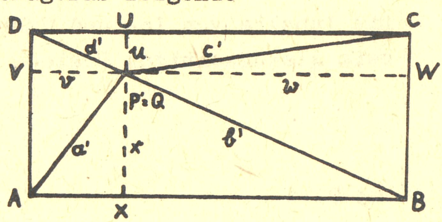
Damit ist t teilbar durch $2^6 \cdot 2^2 \cdot 2 = 2^9 = 512$.

6. Der Abstand des Punktes P von D sei d. **7 Punkte**
Es sei PQ das Lot von P auf die Ebene des Rechtecks. Die Parallele durch Q zu $\begin{Bmatrix} AD \\ AB \end{Bmatrix}$ schneide die Gerade $\begin{Bmatrix} AB \\ AD \end{Bmatrix}$ in $\begin{Bmatrix} X \\ V \end{Bmatrix}$,
die Gerade $\begin{Bmatrix} DC \\ BC \end{Bmatrix}$ in $\begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix}$. Es sei
$\overline{PQ} = h$, $\overline{QX} = x$, $\overline{QU} = u$, $\overline{QV} = v$, $\overline{QW} = w$.

Dann erhält man nach jeweils zweimaliger Anwendung des Lehrsatzes des Pythagoras folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= v^2 + x^2 + h^2 \\
b^2 &= w^2 + x^2 + h^2 \\
c^2 &= u^2 + w^2 + h^2 \\
d^2 &= u^2 + v^2 + h^2
\end{aligned}
$$

Abb. L9;6



Daraus folgt (nach Addition)

$a^2 + c^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2$

und

$b^2 + d^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2.$

Somit gilt

$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

und damit

$d^2 = a^2 - b^2 + c^2$ (also insbesondere $a^2 + c^2 \geqq b^2$).

Der Abstand des Punktes P von D beträgt folglich

$$d = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}\ .$$