VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Gesucht werden fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren jede größer als 2 ist und von denen die kleinste durch 2 und die nächstfolgenden der Reihe nach durch 3, durch 4, durch 5 und durch 6 teilbar sein sollen.

   a) Nennen Sie ein Beispiel für fünf derartige Zahlen!

   b) Wie kann man alle Lösungen der Aufgabe erhalten?

2. Von einem Dreieck $\triangle$ ABC seien die Längen zweier Seiten und die Länge der Winkelhalbierenden des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt.
   Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne des Umkreises des Dreiecks, die durch Verlängerung der erwähnten Winkelhalbierenden entsteht!

3. Geben Sie alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen an, für die

$$x^3 - y^3 = 999 \text{ ist!}$$

4. Vier Personen A, B, C und D machen je drei Angaben über eine gleiche Zahl x. Nach Vereinbarung soll bei jedem mindestens eine Angabe wahr und mindestens eine Angabe falsch sein.

A sagt:

(1) Das Reziproke von x ist nicht kleiner als 1.

(2) x enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.

(3) Die 3. Potenz von x ist kleiner als 221.

B sagt:

(1) x ist eine gerade Zahl.

(2) x ist eine Primzahl.

(3) x ist ein ganzzahliges Vielfaches von 5.

C sagt:

(1) x ist irrational.

(2) x ist kleiner als 6.

(3) x ist Quadrat einer natürlichen Zahl.

D sagt:

(1) x ist größer als 20.

(2) x ist eine positive ganze Zahl, deren dekadische Darstellung mindestens 3 Stellen enthält.

(3) x ist nicht kleiner als 10.

Ermitteln Sie x !

L 9

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. b) Angenommen, man hat fünf Zahlen der gesuchten Art. Dann hat die kleinste von ihnen, da sie größer als 2 ist, die Form $2 + k$ mit einer ganzen Zahl $k \geq 1$. Die fünf Zahlen lauten demnach $2 + k$, $3 + k$, ..., $6 + k$. Da sie in dieser Reihenfolge durch 2, 3,..., 6 teilbar sind, so ergibt sich der Reihe nach, daß k Vielfaches von 2, 3,..., 6, also auch Vielfaches des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen 60 von 2, 3,..., 6, sein muß. Umgekehrt: Für jedes positive Vielfache 60 n von 60 sind (1) $2 + 60n$, $3 + 60n$, ..., $6 + 60n$ fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen größer als 2, die in dieser Reihenfolge durch 2, 3, ..., 6 teilbar sind. Man erhält alle Lösungen der Aufgabe in der Form (1) (mit ganzem $n \geq 1$). Insbesondere führt $n = 1$ auf die Lösung — 5 Punkte

   a) 62, 63, ..., 66. — 3 Punkte

   zusammen 8 Punkte

2. Es seien a, b die Längen der Seiten BC und AC des Dreiecks $\triangle ABC$, w_c die Länge der Winkelhalbierenden CW und schließlich s die gesuchte Länge der Sehne CS (siehe Abb. L 9;2). — 8 Punkte

   Nach dem Satz über Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen (BC) gilt dann

$$\overline{\sphericalangle CAW} = \overline{\sphericalangle CSB} \quad {}^{+)}$$

   Nach Definition der Winkelhalbierenden gilt weiter

$$\overline{\sphericalangle ACW} = \overline{\sphericalangle SCB}.$$

+) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$

30 03 75-1

Daraus folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz

$$\triangle ACW \sim \triangle SCB$$

und damit

$$b : w_\gamma = s : a$$

$$w_\gamma \cdot s = a \cdot b$$

$$s = \frac{a \cdot b}{w_\gamma}$$

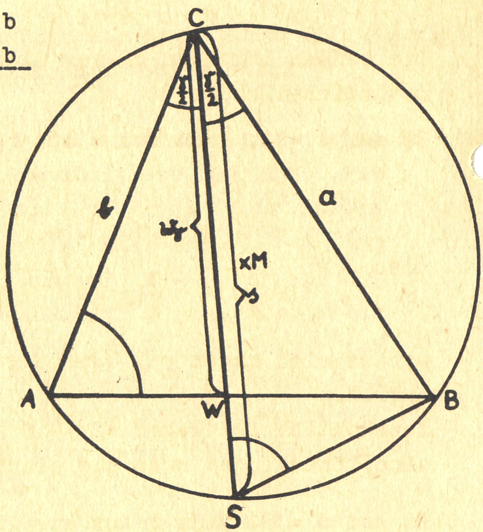

Abb. L9;2

3. Angenommen, (x,y) ist ein solches Zahlenpaar, 12 Punkte

dann gilt: $x^3 > y^3$, also

$x > y$, also

$x = y + d$ (d natürliche Zahl). (1)

Ferner gilt:

$$y^3 + 3y^2d + 3yd^2 + d^3 - y^3 = 999,$$

also

$$d\,(3y^2 + 3yd + d^2) = 999. \qquad (2)$$

Daraus folgt

$$d \mid 999.$$

Wegen $999 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$ hat 999 außer 1, 3 und 9 als positive Teiler nur Zahlen ≥ 27. Wegen $27^3 > 999$ und (2) scheiden die letzteren als Werte für d aus, d.h. es kann höchstens $d = 1$ oder $d = 3$ oder $d = 9$ sein.

L 9

Es sei d = 1. Dann folgt aus (2)

$$3y^2 + 3y + 1 = 999$$

$$y^2 + y - \frac{998}{3} = 0.$$

Die beiden Lösungen dieser Gleichung sind keine natürlichen Zahlen.

Es sei d = 3. Dann folgt aus (2)

$$3y^2 + 9y + 9 = 333$$

$$y^2 + 3y - 108 = 0,$$

also

$$y_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 + 432},$$

woraus sich wegen $y > 0$ also $y = 9$ und wegen (1) $x = 12$ ergibt.

Tatsächlich ist wegen $12^3 - 9^3 = 1728 - 729 = 999$ hiermit eine Lösung, und zwar die einzige mit d = 3, gefunden.

Es sei d = 9. Dann folgt aus (2)

$$3y^2 + 27y + 81 = 111$$

$$y^2 + 9y - 10 = 0,$$

also

$$y_{1,2} = -\frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{81 + 40} \quad ,$$

woraus sich $y = 1$ und wegen (1) $x = 10$ ergibt.

Tatsächlich ist auch dies wegen $10^3 - 1^3 = 999$ eine Lösung, und zwar die einzige mit d = 9.

Die einzigen Zahlenpaare (x,y), die im Bereich der natürlichen Zahlen die gegebene Gleichung erfüllen, sind also

(10, 1) und (12, 9).

4. Wäre die Angabe D_2 wahr, würde also gelten 12 Punkte
$100 \leqq x$, dann wären auch D_1 und D_3 wahr. Das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß D mindestens eine falsche Angabe macht.
Also gilt (a) $x < 100$.
Wäre Angabe D_3 falsch, also $x < 10$, dann wären auch D_1 und D_2 falsch. Das widerspräche der Voraussetzung, nach der D mindestens eine wahre Angabe zu machen hat.
Also gilt (b) $x \geqq 10$.

Alle drei Angaben von B enthalten die Aussage, daß x eine ganze Zahl ist. Da mindestens eine dieser Angaben richtig sein muß, gilt
(c) x ist eine ganze Zahl.
Wegen (b) ist C_2 falsch und wegen (c) ist C_1 falsch.
Also muß C_3 richtig sein, und es folgt
(d) x ist Quadrat einer natürlichen Zahl.
Wegen (b) ist A_1 falsch, und wegen (b) ist auch A_3 falsch. Also ist A_2 wahr, und es gilt
(e) die gesuchte Zahl enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.

Danach kommen nun noch höchstens alle diejenigen Quadratzahlen x mit $10 \leqq x < 100$ in Frage, in deren dekadischer Darstellung keine 6 auftritt.
Das sind die Zahlen 25, 49 und 81 und nur diese.
Da damit B_1 und B_2 falsch sind, muß B_3 richtig sein. Die gesuchte Zahl kann also höchstens die Zahl 25 sein.
Um umgekehrt zu zeigen, daß 25 tatsächlich die gesuchte Zahl ist, werden für $x = 25$ die Wahrheitswerte der einzelnen Angaben überprüft. Man erhält in der angegebenen Reihenfolge:
bei A: FWF, bei B: FFW, bei C: FFW, bei D: WFW.
Daher ist in jedem Falle mindestens eine wahre und eine falsche Angabe vorhanden, wie zu zeigen war.

x ist die Zahl 25.