A 8;I VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Beweise folgenden Satz:
   Jedes Dreieck $\triangle$ ABC läßt sich in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegen.

2. Von fünf äußerlich gleichen Kugeln haben genau drei gleiches Gewicht; die beiden übrigen, die untereinander gleich schwer sind, haben jeweils ein anderes Gewicht als jede der erstgenannten.
   Beweise, daß in jedem Falle (d. h. bei jedem möglichen Resultat der durchgeführten Wägungen) drei Wägungen ausreichen, um die beiden letztgenannten Kugeln herauszufinden, wenn als Hilfsmittel nur eine zweischalige Waage ohne Wägestücke zur Verfügung steht!

3. Es ist zu beweisen:
   Läßt die Quersumme einer natürlichen Zahl bei Division durch 9 den Rest r, so läßt auch die Zahl selbst bei Division durch 9 den Rest r.

3. Es ist zu beweisen:

Läßt die Quersumme einer natürlichen Zahl bei Division durch 9 den Rest r, so läßt auch die Zahl selbst bei Division durch 9 den Rest r.

4. Von einem Rechteck ABCD mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{AD} = b$ $(b < a)$ ist durch genau eine Parallele zu einer Seite ein dem ursprünglichen Rechteck ähnliches abzuschneiden.

Löse die Aufgabe durch Konstruktion!

Bem-erkung: Zwei nicht quadratische Rechtecke heißen ähnlich, wenn das Längenverhältnis der größeren zur kleineren Seite bei beiden gleich ist.

5. Fritz soll eine dreistellige natürliche Zahl z mit sich selbst multiplizieren. Er schreibt versehentlich als ersten Faktor eine um 5 kleinere Zahl hin. Darauf aufmerksam gemacht, sagt er: "Ich nehme als zweiten Faktor einfach eine um 5 größere Zahl, dann wird das Ergebnis richtig."

a) Ist diese Behauptung wahr?

b) Gesetzt, sie sei falsch, zwischen welchen Grenzen bewegt sich der absolute Fehler, wenn z alle dreistelligen Zahlen durchläuft?

6. Die Zahlen a, b, c und d mögen folgenden Bedingungen genügen:

(1) $d > c$
(2) $a + b = c + d$
(3) $a + d < b + c$

Ordne die Zahlen der Größe nach (beginne mit der größten Zahl)!

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1. Es genügt zu beweisen, daß in jedem Dreieck wenigstens ein Höhenfußpunkt zwischen den beiden Eckpunkten einer Dreieckseite liegt. Das trifft für den Fußpunkt der vom Scheitelpunkt eines größten Dreieckswinkels auf die gegenüberliegende Seite gefällten Höhe zu. 7 Punkte

Beweis: Ein größter Winkel des Dreiecks $\triangle ABC$ liege o.B.d.A. bei C. Der Fußpunkt des von diesem Punkt auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes sei D. Würde D nicht zwischen A und B, sondern auf der Geraden durch diese Punkte außerhalb der Seite AB oder in A oder in B liegen, so wäre der Winkel $\sphericalangle BAC$ (bzw. $\sphericalangle ABC$) als Außenwinkel im Dreieck $\triangle DCA$ (bzw. $\triangle DBC$) oder als rechter Winkel $\sphericalangle BDC$ (bzw. $\sphericalangle ADC$) nicht spitz.

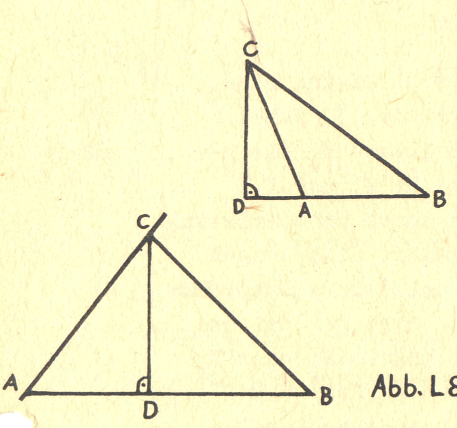


Abb. L8;1

Laut Voraussetzung ist aber keiner dieser Winkel größer als der Winkel bei C, also kann auch keiner dieser Winkel größer als 60° sein. Damit ist ein Widerspruch erreicht, die Behauptung also bewiesen.

2. Zum Beweis wird ein Verfahren angegeben, das nach drei Wägungen sicher zum Ziel führt: 7 Punkte
Wir bezeichnen die Kugeln mit $K_1 \ldots K_5$. Bei der ersten Wägung lege man je eine Kugel, etwa K_1 und K_2, auf eine Waagschale, bei der 2. Wägung nehme man zwei weitere, bisher nicht gewogene Kugeln, etwa K_3 und K_4. Dann können die ersten beiden Wägungen folgende Resultate haben (in der Übersicht ist Gleichgewicht mit Gl. und nicht Gleichgewicht mit n.Gl. symbolisiert):

	1. Wägung	2. Wägung
a)	Gl.	Gl.
b)	Gl.	n. Gl.
c)	n. Gl.	Gl.
d)	n. Gl.	n. Gl.

Im Fall a) vergleiche man in der 3. Wägung eine Kugel der 1. Wägung, etwa K_1, mit der 5. Kugel. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_3 und K_4 die gesuchten Kugeln, andersfalls sind es K_1 und K_2.
Die Fälle b) und c) lassen sich durch Umnumerierung auf einander zurückführen. Es genügt also, einen dieser Fälle zu betrachten, es sei der Fall b). Man vergleiche in der dritten Wägung eine der beiden Kugeln K_1 oder K_2 mit einer der Kugeln K_3 oder K_4. Es werde z. B. K_1 mit K_3 verglichen. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_4 und K_5 die gesuchten Kugeln, herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_3 und K_5.
Im Fall d) vergleiche man schließlich eine der gewogenen Kugeln, etwa K_1, mit der 5. Kugel. Es sei o.B.d.A. die Kugel K_1 leichter als K_2. Ebenso sei o.B.d.A. K_3 leichter als K_4. Herrscht nun beim Vergleich mit K_5 Gleichgewicht, so sind K_2 und K_4 die gesuchten Kugeln; herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_1 und K_3. In jedem Falle (und andere Fälle

gibt es nicht) hat man die beiden gesuchten Kugeln mit drei Wägungen ermittelt.

3. Die Zahlen 1, 10, 100, 1000 ... lassen bei Division durch 9 jeweils den Rest 1, weil der Vorgänger jeder dieser natürlichen Zahlen durch 9 teilbar ist; die Zahlen 2, 20, 200, 2000 ..., die sich als 1 + 1, 10 + 10, 100 + 100 ... schreiben lassen, ergeben jeweils den Rest 2; die Zahlen 3, 30, 300 ... den Rest 3 usw., die Zahlen 8, 80, 800 ... den Rest 8, und 9, 90, 900 ... schließlich den Rest 0. 6 Punkte

Nun läßt sich jede natürliche Zahl z in der Form $z=a_0 \cdot 10^0+ a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + ..+ a_n \cdot 10^n$ schreiben (mit ganzen Zahlen a: für die $0 \leqq a_i \leqq 9$ gilt). Die Quersumme dieser Zahl lautet dann $Q(z) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ...+ a_n$.

Bei Division durch 9 läßt nach dem Obigen

$a_0 \cdot 10^0$ den gleichen Rest wie a_0,

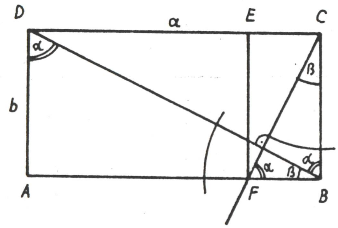
$a_1 \cdot 10^1$ den gleichen Rest wie a_1, ..., $a_n \cdot 10^n$ den gleichen Rest wie a_n.

Die Summe z der $a_i \cdot 10^i$ läßt daher bei Division durch 9 den gleichen Rest wie die Summe $Q(z)$ der a_i.

gleichen Rest wie a_n.

Die Summe z der $a_i \cdot 10^i$ läßt daher bei Division durch 9 den gleichen Rest wie die Summe Q(z) der a_i.

4. I. Angenommen, es gibt eine solche Parallele. Dann kann sie wegen $b < a$ nur parallel zur Seite AD gezogen werden. Es sei EF diese Parallele.



Dann gilt:
ABCD ~ BCEF und damit auch: $\triangle ABD \sim \triangle BCF$.
Daraus folgt:
$\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle BCF$.

II. Daher kommt man zu folgender Konstruktion:
Man trägt im Punkt C an BC nach der Seite hin, auf der A liegt, einen Winkel von der Größe des Winkels $\sphericalangle ABD$ an. Der freie Schenkel dieses Winkels schneide die Seite AB in F.

III. Die Parallele zu AD durch F entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Die Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle BCF$ sind laut Konstruktion ähnlich; denn sie stimmen in den Winkeln überein. Daher gilt:

$\overline{AD} : \overline{BF} = \overline{AB} : \overline{BC}$ und mithin ABCD ~ BCEF.

IV. Die Konstruktion ist stets auf genau eine Weise ausführbar. Da die Größe des Winkels $\sphericalangle ABD$ zwischen 0° und 90° liegt, existiert ein solcher Schnittpunkt F und ist von B verschieden. Daher existiert das Dreieck $\triangle CFB$. Wegen (III) gilt

$\frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} = \frac{a}{b} > 1$, also $\overline{BC} > \overline{BF}$, und F liegt zwischen A und B.

5. a) Fritz sollte rechnen: $z \cdot z = z^2$. Er rechnete:
$(z - 5)(z + 5) = z^2 - 25$.
Sein Weg ist also falsch.

b) Der absolute Fehler beträgt in jedem Falle: -25.
Er ist also nicht je nach der Zahl z verschieden, sondern konstant.

6. Wegen (1) gilt $b + d > b + c$, und weil $a + d < b + c$ ist, findet man $a + d < b + d$ und daraus $a < b$. (4)

Durch Subtraktion erhält man aus (2) und (3):

$$d - b < b - d,$$
also
$$2d < 2b,$$
$$d < b. \quad (5)$$

Aus (2) erhält man $b - d = c - a$, woraus sich wegen $b > d$ die Aussage (6) $c > a$ ergibt.

Wegen (4), (5) und (6) ist die gesuchte Reihenfolge $b > d > c > a$.