A 8

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. a) Beweise folgende Aussage:
Wenn in einem Drachenviereck ABCD zwei gegenüberliegende Innenwinkel je 90° groß sind, dann hat es sowohl einen Inkreis als auch einen Umkreis.

   b) Zeige, daß diese Kreise dann auch jeweils eindeutig bestimmt sind!

   c) Untersuche, unter welcher Bedingung die Mittelpunkte dieser beiden Kreise zusammenfallen!

2. Gegeben sei eine dreistellige Zahl, deren Einerziffer nicht 0 ist. Man vertausche ihre 1. und 3. Ziffer miteinander und denke sich die Differenz zwischen der ursprünglichen und der so entstandenen Zahl gebildet. Wie kann man, ohne diese Differenz selbst ausrechnen zu müssen, alle diejenigen natürlichen Zahlen finden, die Teiler des Betrages dieser Differenz sind?

3. Beweise folgenden Satz:
Der Winkel zwischen einer Höhe und der zugehörigen (d.h. vom gleichen Eckpunkt ausgehenden) Winkelhalbierenden eines jeden Dreiecks $\triangle ABC$ ist halb so groß wie der Betrag der Differenz der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks.

4. Ein mit konstanter Geschwindigkeit v_1 fahrender Lastkraftwagen wird 1 h 25 min nach Fahrtbeginn von einem ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit v_2 fahrenden Personenkraftwagen eingeholt, der 30 min später vom gleichen Ort abfuhr, aber eine um 25 $\frac{km}{h}$ größere Geschwindigkeit als der LKW hatte.

   a) Berechne v_1 und v_2!

   b) Welche Länge s hat die von beiden Fahrzeugen bis zum Überholungspunkt durchfahrene Wegstrecke?

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1.

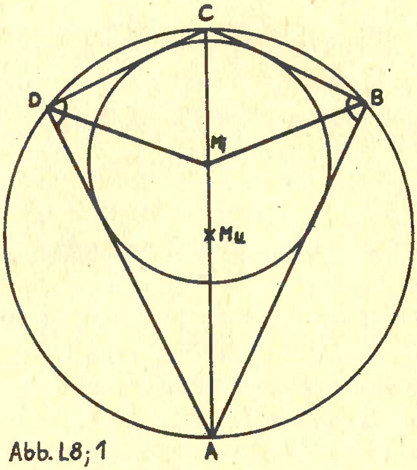

Abb. L8; 1

a) Jedes konvexe Drachenviereck besitzt einen Inkreis. — 8 Punkte

Beweis: Hat ein Drachenviereck ABCD etwa die Gerade AC als Symmetrieachse, so sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$ kongruent (sss). Die Halbierenden der Winkel bei B und D schneiden sich daher auf AC. Ihr Schnittpunkt sei M_i. Da AC Halbierende der Winkel bei A und C ist, ist M_i Schnittpunkt aller vier Winkelhalbierenden des Vierecks ABCD. Daher hat M_i von allen vier Seiten des Vierecks denselben Abstand. Wegen der Konvexität von ABCD fallen auch die Fußpunkte der von M_i auf die Geraden durch A, B; durch B, C; durch C, D bzw. D, A gefällten Lote ins Innere der Strecken AB, BC, CD bzw. DA. Daher ist M_i Inkreismittelpunkt des Drachenvierecks ABCD.

Für ein Drachenviereck ABCD mit AC als Symmetrieachse sind nun unter der zusätzlichen Voraussetzung der Aufgabenstellung folgende zwei Fälle möglich:

1. Fall: $\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle ADC} = 90^\circ$. x)

In diesem Fall hat das Drachenviereck ABCD als Umkreis den Thaleskreis über dem Durchmesser AC. Der Umkreismittelpunkt M_u liegt auf AC und halbiert AC.

2. Fall: $\overline{\sphericalangle BAD} = \overline{\sphericalangle BCD} = 90^\circ$.

In diesem Fall folgt aus

$$\overline{\sphericalangle ABC} + \overline{\sphericalangle ADC} = 360^\circ - (\overline{\sphericalangle BAD} + \overline{\sphericalangle BCD}) = 180^\circ$$

und

$$\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle ADC} \quad \text{(dies wegen } \triangle ABC \cong \triangle ADC\text{)},$$

daß

$$\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle ADC} = 90^\circ$$

gilt, also zugleich auch der 1. Fall vorliegt.

b) Der Umkreis ist eindeutig bestimmt bereits dadurch, daß er durch drei der Punkte A, B, C, D geht, etwa durch A, B, C (sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks $\triangle ABC$). Entsprechend ist der Mittelpunkt des Inkreises (und damit dieser selbst) eindeutig bestimmt als Schnittpunkt etwa der Halbierenden der Innenwinkel bei A und B. (Bemerkung: Dies gilt auch im Quadratfall, in welchem nicht etwa drei Vierecksseiten, genügend verlängert, ein Dreieck bilden). 2 Punkte

c) M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn im Dreieck $\triangle ABC$ die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$ und die Seitenhalbierende der Seite AC zusammenfallen. Das ist genau im gleichschenkligen Dreieck der Fall, d.h. M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn das Drachenviereck ABCD ein Quadrat ist. 2 Punkte

zusammen 12 Punkte

x) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$

2. Die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffer der ursprünglichen Zahl werde mit a, b bzw. c bezeichnet. Dann ist diese Zahl z_1 als 100a + 10b + c und die zweite Zahl z_2 als 100c + 10b + a darstellbar. Für die Differenz $d = z_1 - z_2$ ergibt sich

10 Punkte

$d = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a)$

$d = 99a - 99c$

$d = 99 \cdot (a - c).$

Genau die folgenden natürlichen Zahlen sind also Teiler von d:

(1) Alle natürlichen Teiler von 99, d.s. 1, 3, 9, 11, 33, 99,

(2) alle natürlichen Teiler von $|a - c|$,

(3) alle Produkte aus je einer unter (1) genannten mit je einer unter (2) genannten Zahl.

*)Diese Aufzählung wird nicht verlangt, falls (1), (2) und (3) richtig angegeben sind.

*) (Ausführliche Aufzählung:

Für $|a - c|$ kommen |wegen 0 a = 9; 0 c = 9; a, c ganzzahlig| nur die Werte 0,..., 8 in Frage; man erhält:

$\|a-c\|$	natürliche Teiler von d
0	alle natürlichen Zahlen
1	1,3,9,11,33,99
2	1,2,3, 6, 9,11,18, 22,33,66, 99,198
3	1,3,9,11,27,33,99,297
4	1,2,3, 4, 6, 9,11, 12,18,22, 33, 36,44, 66, 99,132,198,396
5	1,3,5, 9,11,15,33, 45,55,99,165,495
6	1,2,3, 6, 9,11,18, 22,27,33, 54, 66,99,198,297,594,
7	1,3,7, 9,11,21,33, 63,77,99,231,693
8	1,2,3, 4, 6, 8, 9, 11,12,18, 22, 24,33, 36, 44, 66,72,88,99, 132,198,264,396,792)

3. Es sei o.B.d.A. die Höhe CD und die Winkelhalbierende CE des Dreiecks $\triangle ABC$ betrachtet. Der Winkel zwischen beiden habe die Größe δ, die Dreieckswinkel mögen die Größen α, β, γ haben. Ist $\alpha = \beta$, so fallen CD und CE zusammen, also ist dann $\delta = 0^\circ$ und die Behauptung daher richtig. Sei nun $\alpha \neq \beta$, etwa $\alpha > \beta$. Dann liegt E zwischen D und B. Da E auch zwischen A und B liegt, folgt $\sphericalangle DEC \cong \sphericalangle AEC$, d.h. $90^\circ - \delta = 180^\circ - (\alpha + \frac{\gamma}{2})$, also $\delta = \alpha + \frac{\gamma}{2} - 90^\circ$ $= \alpha + 1/2(180^\circ - \alpha - \beta) - 90^\circ = 1/2(\alpha - \beta)$, w.z.b.w. — 9 Punkte

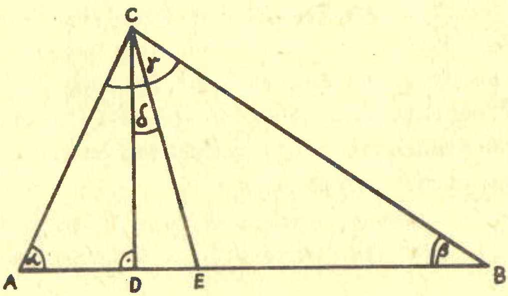

Abb. L8;3

4. In der Zeit $t_1 = 85$ min legt der LKW die gleiche Strecke zurück, für die der PKW die Zeit $t_2 = 55$ min brauchte.
Bezeichnet man die Geschwindigkeit des LKW mit
$v_1 = x \frac{km}{h}$, dann beträgt die des PKW
$v_2 = (x + 25) \frac{km}{h}$.
Wegen $s = t_1 \cdot v_1 = t_2 \cdot v_2$ gilt dann:

$$x \cdot \frac{85}{60} = (x + 25) \cdot \frac{55}{60}.$$

Daraus erhält man

$$x = \frac{5 \cdot 55}{6} = 45\,\frac{5}{6}.$$

L 8

a) Die Geschwindigkeit des LKW betrug 7 Punkte

$45\,\frac{5}{6}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$,

die des PKW $70\,\frac{5}{6}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) Wegen $\frac{5\cdot 55}{6}\cdot\frac{85}{60} = 64\,\frac{67}{72} \approx 64{,}9$ beträgt die 2 Punkte

durchgefahrene Wegstrecke $s = 64\,\frac{67}{72}\,\text{km} \approx 64{,}9$ km.

Umgekehrt werden durch diese Werte in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt: In 85 min durchfährt der LKW mit seiner Geschwindigkeit $45\,\frac{5}{6}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ die Strecke $\frac{85}{60}\cdot\frac{275}{6}\,\text{km} = \frac{5\cdot 55\cdot 85}{6\cdot 60}\,\text{km} = s$; die Geschwindigkeit $70\,\frac{5}{6}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ des PKW ist um $25\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ größer als die des LKW, und mit ihr durchfährt er in (85-30)min = 55 min die Strecke

$\frac{55}{60}\cdot\frac{425}{6}\,\text{km} = \frac{5\cdot 55\cdot 85}{6\cdot 60}\,\text{km} = s$.

zusammen 9 Punkte