VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 7

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Ulrike geht einkaufen. Sie hat genau 9,27 M bei sich, darunter genau 12 Einpfennigstücke, und kauft im Konsum für insgesamt 2,36 M ein. Beim Bezahlen stellt sie fest, daß sie nicht passend bezahlen kann. Der kleinstmögliche ausreichende Betrag, den sie der Verkäuferin geben kann, beträgt 4 M.
Ermittle, was für Geldstücke oder Geldscheine und wieviel von jeder Sorte Ulrike nach diesen Angaben bei sich haben konnte!

2. Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $a > b$.

   a) Man berechne alle Zahlen x, für die die Summe aus x und dem Produkt von a und b das Quadrat der Zahl a ergibt!

   b) Man berechne alle Zahlen y, für die die Differenz aus dem Produkt von a und b und der Zahl y das Quadrat der Zahl b ergibt!

3. Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $r = 3$ cm, $c = 5{,}5$ cm und $h_c = 3$ cm!
Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, c die Länge der Seite AB und h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe des Dreiecks.

A 7

4. Ein beliebig vorgegebenes konvexes Fünfeck ABCDE ist unter Beibehaltung des Eckpunktes A zeichnerisch in ein flächengleiches Dreieck zu verwandeln.

L 7

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Wegen des Gesamtbetrages muß Ulrike wenigstens ein Fünfpfennigstück bei sich gehabt haben.
Da 4 M der kleinstmögliche Betrag ist, kann Ulrike kein Einmarkstück, kein Fünfzigpfennigstück und auch nicht mehr als ein Zehnpfennigstück oder mehr als drei Fünfpfennigstücke besessen haben. Andernfalls hätte sie entweder passend oder mit einem kleineren Betrag (z. B. 3 M; 2,50 M; 2,40 M) bezahlen können. Sie konnte daher nur folgende Geldstücke bzw. Geldscheine bei sich haben:
Entweder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 1 Zehnpfennigstück, 1 Fünfpfennigstück, 12 Einpfennigstücke
oder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 3 Fünfpfennigstücke, 12 Einpfennigstücke.

10 Punkte
Falls nur eine Lösung angegeben wird, sind 5 Punkte abzuziehen.

2. a) Angenommen, es gibt eine Zahl x mit der geforderten Eigenschaft, dann gilt:

$$ab + x = a^2, \quad \text{woraus man}$$

$$x = a^2 - ab \text{ erhält.}$$

Also kann höchstens die Zahl

$$x = a^2 - ab = a(a - b) \text{ Lösung sein.}$$

*) Tatsächlich ist

$$a \cdot b + a(a - b) = ab + a^2 - ab = a^2.$$

4 Punkte

30 03 75-1

b) Angenommen, es gibt eine Zahl y mit der gefor- derten Eigenschaft, dann gilt: — 4 Punkte

$$ab - y = b^2, \quad \text{woraus man}$$
$$y = ab - b^2 \quad \text{erhält.}$$

Also kann höchstens die Zahl

$$y = ab - b^2 = b\,(a - b) \quad \text{Lösung sein.}$$

*) Tatsächlich ist

$$a \cdot b - b\,(a - b) = ab - ab + b^2 = b^2.$$

zus. 8 Punkte

*) Falls dieser zweite Teil der Beweisführung bei a) und bei b) nicht vorhanden ist, ist insgesamt 1 Punkt abzuziehen.

3. (I) Angenommen, △ ABC sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll; M sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks. Dann liegt der Punkt C auf dem Umkreis des Dreiecks △ ABC im Abstand h_c von AB. — 10 Punkte

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck △ ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen kann, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
Man zeichnet AB und schlägt um A und B die Kreise mit dem Radius der Länge r. Einer ihrer Schnittpunkte sei M, der andere M_1 genannt. Nun schlägt man den Kreis um M mit r. Dann konstruiert man die beiden Parallelen zu AB im Abstand h_c.

Wegen $h_c = r$ und $c < 2r$ schneidet diejenige Parallele, die mit M_1 auf der gleichen Seite der durch A und B gehenden Geraden liegt, den Kreis um M durch A nicht.
Die andere Parallele schneidet diesen Kreis in zwei Punkten, C und C_1. Die Dreiecke $\triangle$ ABC bzw. ABC_1 entsprechen den Bedingungen.

(III) Der Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck $\triangle$ ABC tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich leicht aus (II).

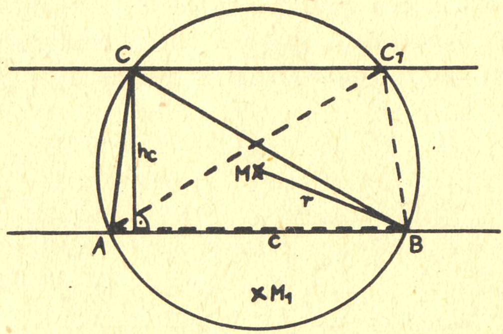

Abb. L7;3

4. Das Fünfeck ABCDE läßt sich in die Teildreiecke $\triangle$ ADE, $\triangle$ ABD und $\triangle$ BCD zerlegen. Man zieht durch C zu DB die Parallele und verlängert AB über B hinaus bis zum Schnitt mit dieser Parallelen. Der Schnittpunkt sei C'. Dann ist das Dreieck $\triangle$ BC'D flächeninhaltsgleich dem Dreieck $\triangle$ BCD; denn es stimmt in den Längen der Grundseite und der zugehörigen Höhe mit diesem überein. Nun zieht man durch E die Parallele zu AD und verlängert C'D über D hinaus bis zum Schnittpunkt E' mit dieser. Das Dreieck $\triangle$ ADE' ist dann aus dem gleichen Grunde wie oben flächeninhaltsgleich dem Dreieck $\triangle$ ADE. Daher ist das aus den Teildreiecken $\triangle$ ADE', $\triangle$ ABD und $\triangle$ BC'D bestehende Dreieck $\triangle$ AC'E' flächeninhaltsgleich dem Fünfeck ABCDE. 12 Punkte

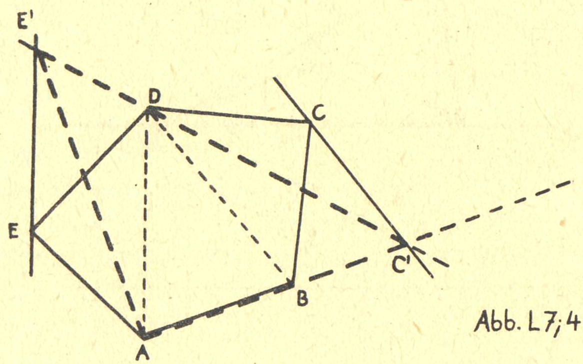

Abb. L7;4