A 6

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 6

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. In einer 6. Klasse erhielt als Jahresendzensur im Fach Mathematik kein Schüler die Note 5, jeder neunte die Note 1, jeder dritte die Note 2 und jeder sechste die Note 4. Über die Schülerzahl n dieser Klasse ist folgendes bekannt: $20 < n < 40$. Berechne die Anzahl der Schüler, die als Jahresendzensur die Note 3 erhielten!

2. Während der Sommerferien besuchte Monika die Hauptstadt der UdSSR. Für ihre Mathematikarbeitsgemeinschaft brachte sie unter anderem folgende Aufgabe mit:
Im "Gorki"-Ring der Moskauer Untergrundbahn befinden sich vier Rolltreppen von unterschiedlicher Länge. Die Gesamtlänge der beiden Rolltreppen mittlerer Länge beträgt 136 m, wobei die Länge der einen um 8 m größer ist als die der anderen. Die Länge der längsten Rolltreppe beträgt $\frac{3}{10}$ und die der kürzesten $\frac{3}{14}$ von der Gesamtlänge aller vier Rolltreppen.
Berechne die Länge jeder einzelnen Rolltreppe!

3. Über der Seite CD eines Quadrates ABCD mit $\overline{AB} = 4$ cm ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle$ DCE so zu konstruieren, daß das Quadrat und das Dreieck die Seite CD gemeinsam haben. Der Punkt E des Dreiecks $\triangle$ DCE sei dabei außerhalb des Quadrates ABCD gelegen.

A 6

Verbinde E mit A und mit B!

Berechne die Größe des Winkels $\sphericalangle$ AEB!

4. Drei Freunde bereiten sich auf die "Kleine Friedensfahrt" vor. Sie trainieren auf einer Rundstrecke. Ihr Start erfolgt zur gleichen Zeit und in gleicher Richtung an der Startlinie S. Manfred legte die erste Runde in genau 3 Minuten, Klaus in genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut in genau 5 Minuten zurück.

   a) Nach wieviel Minuten würden die drei Freunde erstmalig die Startlinie S wieder gleichzeitig erreichen, wenn wir annehmen, daß Manfred für alle weiteren Runden je Runde genau 3 Minuten, Klaus genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut genau 5 Minuten brauchten?

   b) Wieviel Runden hätte jeder von ihnen bis dahin zurückgelegt?

L 6

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 6

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Die Gesamtschülerzahl n muß ein Vielfaches der Zahlen 3, 6 und 9 sein und dabei gleichzeitig der Bedingung $20 < n < 40$ genügen. Das trifft nur auf die Zahl 36 zu. — 10 Punkte

$\frac{1}{9}$ von 36 beträgt 4,

$\frac{1}{3}$ von 36 beträgt 12,

$\frac{1}{6}$ von 36 beträgt 6.

Insgesamt 22 Schüler erhielten also entweder die Note 1, 2 oder 4. Demnach erreichten 14 Schüler die Note 3; denn die Differenz von 36 und 22 beträgt 14.

2. Es sei a die Maßzahl der längsten, b die der zweitlängsten, c die der drittlängsten und d die der kürzesten Rolltreppe sowie g die Maßzahl der Gesamtlänge aller Rolltreppen. — 12 Punkte

Dann gilt: $b + c = 136$ und $b = c + 8$.

Daraus folgt: $b = 72$ und $c = 64$.

Für die Gesamtlänge der längsten und der kürzesten Rolltreppe gilt:

$a + d = \frac{3}{10} g + \frac{3}{14} g = \frac{36}{70} g$,

dann ergibt sich:

$136 = b + c = g - (a + d) = \frac{34}{70} g$;

daraus folgt $\frac{1}{70} g = 4$

demnach $\frac{3}{10} g = 84$

und $\frac{3}{14} g = 60$.

Die Längen der Rolltreppen betragen 84 m, 72 m, 64 m und 60 m.

In der Tat ergibt sich als Probe

$72 + 64 = 136, \qquad 72 = 64 + 8,$

$84 = \frac{3}{10}(84 + 72 + 64 + 60),$

$60 = \frac{3}{14}(84 + 72 + 64 + 60).$

3. Im Dreieck $\triangle$ AED gilt: (siehe Abb. L6;3) 10 Punk

$\overline{AD} = \overline{DE}$ (nach Konstruktion)

(1) Daraus folgt $\sphericalangle DAE \cong \sphericalangle AED$ (als Basiswinkel)

Ferner ist:

(2) $\overline{\sphericalangle EDA} = \overline{\sphericalangle EDC} + \overline{\sphericalangle CDA} = 150^\circ$; +)

denn $\overline{\sphericalangle EDC} = 60^\circ$ (Winkel im gleichseitigen Dreieck)

und $\overline{\sphericalangle CDA} = 90^\circ$ (Winkel im Quadrat).

Aus (1), (2), und $\overline{\sphericalangle AED} + \overline{\sphericalangle EDA} + \overline{\sphericalangle DAE} = 180^\circ$ (nach Winkelsummensatz)

folgt $\overline{\sphericalangle AED} = 15^\circ$.

Entsprechend ist $\overline{\sphericalangle BEC} = 15^\circ$,

also $\overline{\sphericalangle AEB} = \overline{\sphericalangle DEC} - \overline{\sphericalangle AED} - \overline{\sphericalangle BEC} = 30^\circ$.

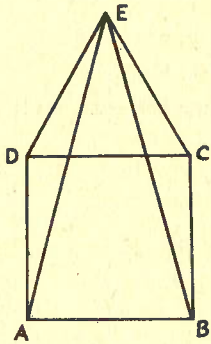

Abb. L6;3

+) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

4. a) Nach 15 Minuten würden die drei Freunde unter den Bedingungen der Aufgabe erstmalig wieder gleichzeitig die Startlinie S erreichen. — 6 Punkte
Beweis hierzu: Helmut brauchte für jede Runde genau 300 Sekunden, Klaus genau 225 Sekunden und Manfred genau 180 Sekunden. Das k.g.V. von 300, 225 und 180 beträgt 900; und 900 Sekunden sind gleich 15 Minuten.

b) In 15 Minuten würden Helmut genau 3, Klaus genau 4 und Manfred genau 5 Runden zurücklegen. — 2 Punkte

zus. 8 Punkte