A 11/12; I

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$x_1 + ax_2 + x_3 = b \qquad (1)$$
$$x_2 + ax_3 + x_4 = b \qquad (2)$$
$$x_3 + ax_4 + x_1 = b \qquad (3)$$
$$x_4 + ax_1 + x_2 = b \qquad (4).$$

Dabei sind a und b reelle Zahlen (Fallunterscheidung!).

2. Welche von allen Ebenen, die eine und dieselbe Körperdiagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a enthalten, schneiden aus dem Würfel eine Schnittfigur kleinsten Flächeninhaltes heraus? Berechnen Sie den Flächeninhalt solch einer Schnittfigur!

3. Geben Sie alle Funktionen $y = f(x)$ an, die jeweils in größtmöglichem Definitionsbereich (innerhalb des Bereichs der reellen Zahlen) der Gleichung

$$a \cdot f(x^n) + f(-x^n) = bx$$

genügen, wobei b eine beliebige reelle Zahl, n eine beliebige ungerade natürliche Zahl und a eine reelle Zahl mit $|a| \neq 1$ ist!

A 11/12; II

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

4. Sechzehn im Dezimalsystem geschriebene natürliche Zahlen mögen eine geometrische Folge bilden, von der die ersten fünf Glieder neunstellig, fünf weitere Glieder zehnstellig, vier Glieder elfstellig und zwei Glieder zwölfstellig sind. Man beweise, daß es genau eine Folge mit diesen Eigenschaften gibt!

5. Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ die Ungleichung
$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0$$
erfüllt ist.

6. Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn mindestens zwei seiner Winkelhalbierenden gleichlang sind.

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

1. Angenommen, (x_1, x_2, x_3, x_4) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems, dann folgt aus (1) und (3) durch Subtraktion 7 Punkte

$$x_1 - x_3 + a(x_2 - x_4) + x_3 - x_1 = 0$$
$$a(x_2 - x_4) = 0 \qquad (5).$$

Ferner folgt aus (2) und (4)

$$a(x_3 - x_1) = 0 \qquad (6).$$

1. <u>Es sei $a \neq 0$.</u> Dann erhält man aus (5) und (6)

$$x_2 = x_4 \quad \text{und} \quad x_1 = x_3,$$

ferner aus (1) und (2)

$$2x_1 + ax_2 = b \qquad (7)$$
$$2x_2 + ax_1 = b \qquad (8).$$

Daraus folgt

$$(4 - a^2)\,x_1 = b\,(2 - a),$$
$$(2 - a)\left[(2 + a)\,x_1 - b\right] = 0 \qquad (9).$$

1.1 <u>Es sei $a \neq 0$, $a \neq 2$, $a \neq -2$.</u>

Dann erhält man aus (9) $x_1 = \frac{b}{2 + a}$

und aus (8) $x_2 = \frac{b}{2 + a}$,

ferner $x_3 = \frac{b}{2 + a}$,

$x_4 = \frac{b}{2 + a}$.

Daher kann höchstens das Quadrupel

$$\left(\frac{b}{2 + a}, \frac{b}{2 + a}, \frac{b}{2 + a}, \frac{b}{2 + a}\right)$$

eine Lösung des Gleichungssystems sein.+)

+) Durch Einsetzen in die Gleichungen (1), (2), (3), (4) zeigt man, daß dies in der Tat der Fall ist.

1.2 <u>Es sei $a = -2$.</u>

Dann hat im Falle $b \neq 0$ die Gleichung (9) und damit das gegebene Gleichungssystem <u>keine</u> Lösung.

Im Falle $b = 0$ folgt aus (7), (5) und (6)

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4.$$

Also können höchstens alle Quadrupel (t,t,t,t), wobei t eine reelle Zahl ist, Lösung sein. Durch Einsetzen in die Gleichungen (1), (2), (3), (4) überzeugt man sich davon, daß dies der Fall ist.

1.3 <u>Es sei $a = 2$.</u>

Dann folgt aus (7)

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{2}.$$

Also können höchstens alle Quadrupel

$$\left(t, \frac{b}{2} - t, t, \frac{b}{2} - t\right),$$

wobei t eine reelle Zahl ist, Lösung sein. Durch Einsetzen zeigt man, daß dies der Fall ist.

2\. <u>Es sei $a = 0$.</u>

In diesem Falle erhält man aus (1) und (2)

$$x_1 + x_3 = b,$$
$$x_2 + x_4 = b.$$

Also können höchstens alle Quadrupel

$$(t_1, t_2, b - t_1, b - t_2),$$

wobei t_1, t_2 beliebige reelle Zahlen sind, Lösung sein.

Durch Einsetzen zeigt man, daß dies der Fall ist.

2\. Man betrachte beispielsweise das Ebenenbüschel, das die (s. Abb. L 11/12; 2) durch die Ecken D und F des Würfels gehende Gerade zur Achse hat. Da D der gemeinsame Punkt von drei Würfelkanten - von AD, DC und DH - und F der gemeinsame Punkt von drei weiteren Würfelkanten - von BF, FG und EF - ist, kann jede der Ebenen des Ebenenbüschels nur solche Kanten in je genau einem von D und F verschiedenen Punkt schneiden, die weder den Punkt D noch F enthalten. Derartige Schnittpunkte können also in ein und derselben Ebene gleichzeitig mit den zueinander parallelliegenden Kanten EH und BC oder mit AE und CG oder mit AB und HG und nur mit diesen entstehen. 6 Punkte

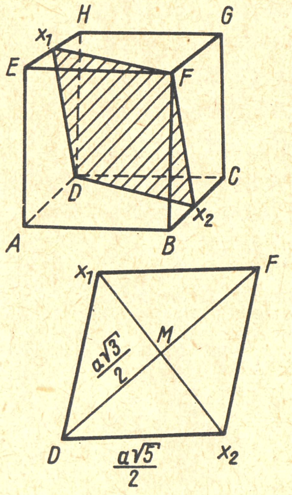

Abb. L 11/12; 2

Die Punkte D und F sowie die Schnittpunkte der betrachteten Ebene mit den beiden anderen Würfelkanten bilden die Ecken eines Vierecks, dessen gegenüberliegende Seiten wegen der Parallelität gegenüberliegender Würfelseiten ebenfalls parallel sind. Die Schnittfiguren sind demnach Parallelogramme.

Man betrachte nunmehr alle Ebenen des genannten Ebenenbüschels, die mit den Kanten EH und BC gemeinsame Punkte haben.

Da die Diagonale DF jede der Schnittfiguren in zwei kongruente Dreiecke zerlegt, wird der Flächeninhalt der Schnittfigur ein Minimum, wenn die Höhe des zugehörigen Dreiecks - also die Länge des von einem Punkt der Kante EH auf DF gefällten Lotes - ein Minimum wird. Dieser Fall tritt ein, wenn X_1 der Halbierungspunkt von EH und X_2 der Halbierungspunkt von BC ist. Es ist nämlich $\overline{X_1M}$ bzw. $\overline{X_2M}$ die kürzeste Entfernung zwischen EH und DF bzw. zwischen BC und DF. Dies folgt daraus, daß im vorliegenden Fall $X_1X_2 \perp EH$ gilt und daß X_1X_2, die zweite Diagonale des Parallelogramms, auch auf der ersten Diagonalen DF senkrecht steht; denn im vorliegenden Fall ist das Parallelogramm ein Rhombus, da $\overline{X_1D} = \overline{X_1F} = \overline{X_2F} = \overline{X_2D} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ist. Die gesuchten Ebenen sind also diejenigen drei Ebenen des Büschels durch D, F, die durch die Mitten von EH und und BC oder von AE und CG oder von AB und GH gehen. Wegen $\overline{DF} = a\sqrt{3}$ und $\overline{MX_2} = \sqrt{\overline{DX_2}^2 - \overline{MD}^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ (was man aus $\overline{X_1X_2} = \overline{EB}$ erhalten kann) ist der gesuchte Flächeninhalt

$$f = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

3. Angenommen, $y = f(x)$ sei eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften und D ihr größtmöglicher Definitionsbereich. Dann liegt mit jeder Zahl z aus D auch $-z$ in D; denn bestimmt man x so, daß $x^n = z$ wird, so existiert $f(z) = f(x^n)$, also nach Aufgabenstellung auch $bx - a.f(x^n) = f(-x^n) = f(-z)$. Für jedes x, für das x^n, also nach dem eben Gezeigten auch $-x^n = (-x)^n$ in D liegt, gilt nun außer 7 Punkte

$$a.f(x^n) + f(-x^n) = bx \qquad (1)$$

auch diejenige Gleichung, die man erhält, wenn man (1) mit $-x$ statt mit x anwendet, d.h.

$$f(x^n) + a \cdot f(-x^n) = -bx. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) erhält man wegen $|a| \neq 1$

$$f(x^n) = \frac{a+1}{a^2-1}\,bx$$

$$= \frac{b}{a-1}\,x.$$

Hieraus erhält man:

Liegt ein $x \geqq 0$ in D, so gilt

$$f(x) = f\left(\sqrt[n]{x}^{\,n}\right) = \frac{b}{a-1}\sqrt[n]{x}\,;$$

liegt ein $x \leqq 0$ in D, so gilt

$$f(x) = f\left(\left(-\sqrt[n]{-x}\right)^n\right) = \frac{b}{a-1}\left(-\sqrt[n]{-x}\right).$$

Daher kommt als gesuchte Funktion höchstens

$$f(x) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{b}{a-1}\sqrt[n]{x}, \text{ falls } x \geqq 0 \\ -\dfrac{b}{a-1}\sqrt[n]{-x}, \text{ falls } x \leqq 0 \end{array}\right\} \text{ in Frage.}$$

Umgekehrt ist diese Funktion sogar für alle reellen x definiert, und für sie gilt (1); denn es ist

$$f(x^n) = \frac{b}{a-1}\,x, \text{ also}$$

$$f(-x^n) = f\left[(-x)^n\right] = -\frac{b}{a-1}\,x,$$

also

$$a.f(x^n) + f(-x^n) = a \cdot \frac{b}{a-1}\,x - \frac{b}{a-1}\,x = \frac{(a-1)b}{a-1}\,x = bx.$$

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

4. Bezeichnet man 16 derartige positive Zahlen mit $a_1, a_2, \dots a_{16}$ und den Quotienten der Folge mit q, so haben die Folgenglieder die Form 7 Punkte
a_1, $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_1 q^2$, ... $a_{16} = a_1 q^{15}$.

I. Ermittlung von q

Aus den Angaben über das stufenweise Anwachsen der Stellenzahlen kann man zunächst wie folgt auf den Wert von q schließen.

a) a_1 und $a_5 = a_1 \cdot q^4$ haben dieselbe Stellenzahl, also ist $q^4 < 10$. Demnach sind alle $q \geqq 2$ wegen $q^4 \geqq 2^4 = 16 > 10$ zu groß.

b) a_{10} ist zehnstellig, also $a_{10} = a_1 \cdot q^9 < 10^{10}$m während a_{15} zwölfstellig ist, also $a_{15} = a_1 q^{14} \geqq 10^{11}$ gilt. Multipliziert man die erste Ungleichung mit q^5, so hat man $a_1 \cdot q^{14} < 10^{10} \cdot q^5$ und damit folgende Abschätzung:
$10^{11} \leqq a_1 \cdot q^{14} < q^5 \cdot 10^{10}$.
Daraus folgt: $10 < q^5$.

c) Aus den beiden Bedingungen zusammen ergibt sich als (grobe) Abschätzung $1 < q < 2$, also kann q keine ganze Zahl, sondern muß eine (nicht-ganze) rationale Zahl zwischen 1 und 2 sein.
Daß q keine irrationale Zahl sein kann, folgt daraus, daß sonst $a_2 = a_1 \cdot q$ (und alle anderen a_i) keine ganze Zahl sein könnte.

d) Setzt man $q = \frac{z}{n}$ (mit positiven ganzen, zueinander teilerfremden Zahlen z und n), so muß wegen

$a_{16} = \frac{a_1 z^{15}}{n^{15}}$ der Nenner in a_1 aufgehen. Das ist aber nur für $a_1 \geqq n^{15}$ möglich.

Somit sind alle $n \geqq 4$ zu groß; denn man hat die Abschätzung $4^{15} = 2^{30} = (2^{10})^3 = 1024^3 > 10^9$, so daß 4^{15} (mindestens) zehnstellig ist, während a_1 neunstellig ist, also $a_1 < 4^{15} \leqq n^{15}$ gelten würde, im Gegensatz zu der oben genannten Bedingung

$$a_1 \geqq n^{15}.$$

e) Somit bleiben für die Lösung der Aufgabe (falls eine Lösung existiert) für q nur die Werte $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ übrig. Nun ist aber $(\frac{3}{2})^5 = \frac{243}{32} < 10$ im Gegensatz zur Bedingung $q^5 > 10$ nach b), also $q = \frac{3}{2}$ zu klein.
Wegen $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ ist $q = \frac{4}{3}$ erst recht zu klein.

f) Somit ist als möglicher Wert für q nur noch $q = \frac{5}{3}$ übrig geblieben.
Weiterhin ist also nachzuprüfen, ob sich ein Wert a_1 so finden läßt, daß alle Daten der Aufgabe erfüllbar sind.

II. <u>Bestimmung von a_1</u>

a) Nach I. d) muß $a_1 = c \cdot 3^{15}$ (c positive ganze Zahl) gelten.
Da $6 \cdot 3^{15} = 86\,093\,442$ achtstellig ist, während a_1 laut Aufgabenstellung neunstellig ist, muß $c \geqq 7$ sein.

b) Alle $c \geqq 8$ kommen nicht mehr in Frage, wie man aus der Betrachtung von a_{10} entnehmen kann. Es ist nämlich

$$a_{10} = c \cdot 3^{15} \cdot (\tfrac{5}{3})^9 = c \cdot 5^9 \cdot 3^6 = c \cdot 1\,423\,828\,125,$$

und $8 \cdot 1\,423\,828\,125$ ist eine elfstellige Zahl, während nach den vorgegebenen Bedingungen a_{10} zehnstellig ist. Alle Faktoren c, die größer als 8 sind, scheiden dann natürlich erst recht aus.

c) Allein unter Berücksichtigung der bisher herangezogenen Bedingungen ist also nachgewiesen, daß das Anfangsglied der Folge nur $a_1 = 7 \cdot 3^{15} = 100\ 442\ 349$ und der Quotient der Folge nur $q = \frac{5}{3}$ lauten können.

III. Die Folge $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$

Abschließend bleibt nachzuprüfen, ob diese beiden Werte mit allen Bedingungen der Aufgabe verträglich sind. Das geschieht am einfachsten, indem die vollständige Folge hingeschrieben wird. Man entnimmt daraus, daß tatsächlich alle Stellenzahlen die verlangten Werte besitzen. Damit ist bewiesen, daß die Aufgabe lösbar ist und genau eine Lösung besitzt.

$a_1 =$	100 442 349	$a_9 =$	5 980 078 125
$a_2 =$	167 403 915	$a_{10} =$	9 966 796 875
$a_3 =$	279 006 525	$a_{11} =$	16 611 328 125
$a_4 =$	465 010 875	$a_{12} =$	27 685 546 875
$a_5 =$	775 018 125	$a_{13} =$	46 142 578 125
$a_6 =$	1 291 696 875	$a_{14} =$	76 904 296 875
$a_7 =$	2 152 828 125	$a_{15} =$	128 173 828 125
$a_8 =$	3 588 046 875	$a_{16} =$	213 623 046 875.

5. Setzt man $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$, so gilt wegen 6 Punkte

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

und

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x\,(2 \cos^2 x - 1) \\ &= \sin x\,(4 \cos^2 x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x\,(1 + \cos x + \tfrac{4}{3} \cos^2 x - \tfrac{1}{3}) \\ &= \tfrac{1}{3} \sin x\,(4 \cos^2 x + 3 \cos x + 2) \\ &= \tfrac{1}{3} \sin x\,(4 \cos^2 x + 2 \cdot 2 \cos x \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{16} + 2 - \tfrac{9}{16}) \\ &= \tfrac{1}{3} \sin x \left[(2 \cos x + \tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{23}{16}\right]. \end{aligned}$$

Nun ist für alle reellen x

$$\left(2 \cos x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} \geqq \frac{23}{16} > 0.$$

Ferner ist für $0 < x < \pi$

$$\sin x > 0,$$

also $f(x) > 0$, w.z.b.w.

6. I. Das Dreieck Δ ABC sei gleichschenklig, und die Bezeichnung sei so gewählt, daß $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist. — 7 Punkte

Dann folgt aus der Kongruenz der Dreiecke Δ ABD und Δ ABE (wsw), daß $\overline{AD} = \overline{EB}$ ist, daß also die Winkelhalbierenden gleichlang sind (vgl. die nebenstehende Figur).

II. Die gleichlangen Winkelhalbierenden seien mit AD und EB bezeichnet, es sei also

$$\overline{AD} = \overline{EB} = w.$$

Außerdem seien $\overline{AB} = c$, $\overline{\sphericalangle BAC} = \alpha$ und $\overline{\sphericalangle ABC} = \beta$,+) und o.B.d.A. werde $\alpha \leqq \beta$ angenommen.

Dann erhält man aus dem Sinussatz die Gleichungen

$$\frac{w}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}, \quad \frac{w}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right)} \qquad (1)$$

und hieraus

$$\sin \alpha \, \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \sin \beta \, \sin\left(\frac{\beta}{2} + \alpha\right). \qquad (2)$$

Bestimmt man ω und δ , was eindeutig möglich ist, so, daß

$$\alpha = \omega - \delta, \quad \beta = \omega + \delta \quad \text{gilt,} \qquad (3)$$

so ist

$$0^\circ < \omega = \frac{\alpha + \beta}{2} < 90^\circ \text{ und } 0^\circ \leqq \delta = \omega - \alpha < 90^\circ. \qquad (4)$$

Ferner ist

$$\frac{\alpha}{2} + \beta = \frac{3}{2}\omega + \frac{\delta}{2} \text{ und } \frac{\beta}{2} + \alpha = \frac{3}{2}\omega - \frac{\delta}{2}. \qquad (5)$$

+) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle$ ABC.

Daher folgt aus (2)

$\sin(\omega - \delta)\ \sin(\frac{3}{2}\omega + \frac{\delta}{2}) = \sin(\omega + \delta)\ \sin(\frac{3}{2}\omega - \frac{\delta}{2})$,

$(\sin\omega\cos\delta - \cos\omega\sin\delta)(\sin\frac{3}{2}\omega\cos\frac{\delta}{2} + \cos\frac{3}{2}\omega\sin\frac{\delta}{2})$

$= (\sin\omega\cos\delta + \cos\omega\sin\delta)(\sin\frac{3}{2}\omega\cos\frac{\delta}{2} - \cos\frac{3}{2}\omega\sin\frac{\delta}{2})$,

also

$$\sin\omega\cos\delta\cos\tfrac{3}{2}\omega\sin\tfrac{\delta}{2} = \cos\omega\sin\delta\sin\tfrac{3}{2}\omega\cos\tfrac{\delta}{2}. \qquad (6)$$

Wegen (4) ist

$\cos\omega \neq 0,\ \cos\delta \neq 0,\ \cos\frac{\delta}{2} \neq 0,\ \sin\frac{3}{2}\omega \neq 0.$

Wäre nun $\delta \neq 0^\circ$, so wäre die rechte Seite von (6) nicht Null, also auch die linke Seite nicht, also wäre $\cos\frac{3}{2}\omega \neq 0$ und man erhielte aus (6)

$$\tan\omega\tan\tfrac{\delta}{2} = \tan\tfrac{3}{2}\omega\tan\delta. \qquad (7)$$

Wegen (4) und (7) wäre dann

$$\tan\tfrac{3}{2}\omega > 0, \text{ also } 0^\circ < \tfrac{3}{2}\omega < 90^\circ.$$

Hieraus, sowie aus $\delta \neq 0^\circ$ und (4) folgte

$0 < \tan\omega < \tan\frac{3}{2}\omega\ ,\quad 0 < \tan\frac{\delta}{2} < \tan\delta$,

also

$$\tan\omega\tan\tfrac{\delta}{2} < \tan\tfrac{3}{2}\omega\tan\delta, \qquad (8)$$

das ist aber ein Widerspruch zu (7).
Also ist $\delta = 0^\circ$ und daher $\alpha = \beta$, d.h. das Dreieck ΔABC ist gleichschenklig, w.z.b.w.