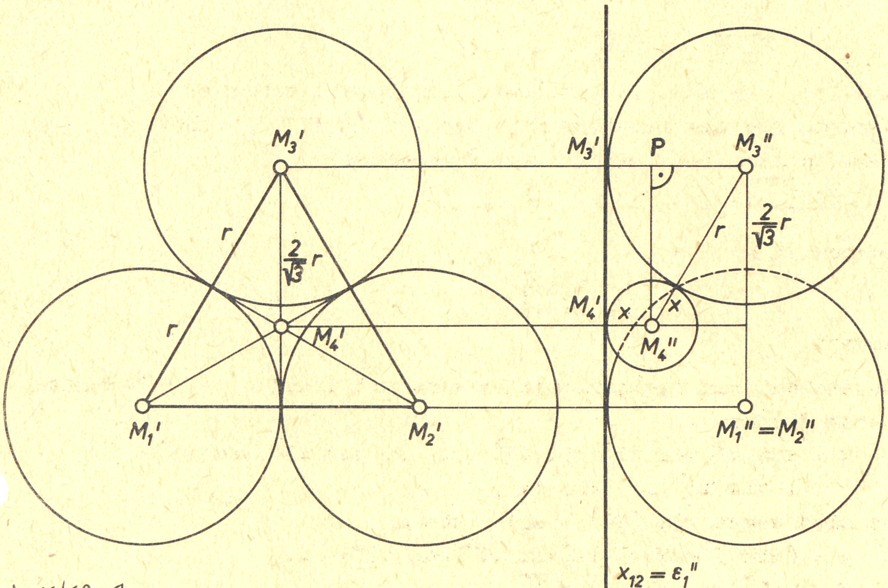
VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1. Es sei $\varepsilon_1$ die Ebene, in der die Tischplatte liegt. Man betrachte die senkrechte Parallelprojektion der drei Kugeln mit dem Radius der Länge r und den Mittelpunkten $M_1$, $M_2$, $M_3$ sowie die Projektion des Mittelpunktes $M_4$ der vierten Kugel mit dem Radius der Länge x auf die gemeinsame Berührungsebene $\varepsilon_1$ Abb. L 11/12;1). 5 Punkte




L 11/12;1

Diese Projektionen der drei Kugelmittelpunkte, die der Reihe nach mit $M_1'$, $M_2'$, $M_3'$ bezeichnet wurden, bilden die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 2r, während $M_4'$ – die Projektion des Mit-

telpunktes der vierten Kugel - der Mittelpunkt dieses Dreiecks ist. $M_1'$, $M_2'$, $M_3'$ und $M_4'$ sind gleichzeitig die Berührungspunkte der Kugeln mit der Ebene $\varepsilon_1$.
Ein ebener Schnitt senkrecht zur Berührungsebene $\varepsilon_1$ durch den Mittelpunkt einer der drei gegebenen Kugeln (z.B. durch $M_3$) und durch den Mittelpunkt der vierten Kugel $M_4$ enthält das Trapez $M_3'' M_3' M_4' M_4''$ (Abb. L 11/12;1), woraus die Länge x des Radius der vierten Kugel errechnet werden kann. Es ist nämlich

$$\overline{M_3''M_4''} = r + x \qquad (1)$$

$$M_3'M_4' = \frac{2r\sqrt{3}}{3} \qquad (2)$$

Schneidet die Parallele durch $M_4''$ zu $M_3'M_4'$ die Strecke $M_3''M_3'$ in P, so erhält man

$$\overline{M_3''P} = r - x \quad \text{sowie} \qquad (3)$$

$$\overline{M_4''P} = \overline{M_3'M_4'}\ .$$

Aus (1), (2) und (3) kann dann die Länge x errechnet werden. Für das rechtwinklige Dreieck $\Delta M_3''PM_4''$ gilt nämlich nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$\left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (r - x)^2 = (r + x)^2,$$

woraus sich

$$\underline{\underline{x = \frac{r}{3}}}$$

ergibt.

2. Bezeichnet man das gesuchte Produkt mit x und setzt ferner — 6 Punkte

$$y = \sin 5^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 15^\circ \ \ldots \ \ldots \ \sin 40^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 50^\circ \ \ldots \ \sin 85^\circ,$$

so wird wegen $\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

$$y = (\sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ) \cdot (\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ) \ \ldots \cdot (\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

und wegen $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^8} \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ \ \ldots \ \sin 80^\circ,$$

also

$$xy = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^8} \sin 5^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 15^\circ \ \ldots \ \sin 85^\circ$$

$$= \frac{1}{2^9} \cdot \sqrt{2}\ y.$$

Daraus folgt wegen $y \neq 0$

$$x = \frac{1}{2^9}\cdot\sqrt{2}\,.$$

3. Es ist 7 Punkte

$$7^1 \equiv 7 \pmod{100},$$
$$7^2 \equiv 49 \pmod{100},$$
$$7^3 \equiv 43 \pmod{100},$$
$$7^4 \equiv 1 \pmod{100},$$

also

$$7^{4k} \equiv 1 \pmod{100},$$
$$7^{4k-1} \equiv 43 \pmod{100},$$

wobei k eine beliebige natürliche von Null verschiedene Zahl ist.

Nun ist

$$7 \equiv -1 \pmod 4, \text{ also } 7^7 \equiv -1 \pmod 4,$$

d.h. $7^7 = 4m - 1$, wobei m eine natürliche Zahl ist.

Daraus folgt

$$7^{7^7} = 7^{4m-1} \equiv 43 \pmod{100}.$$

Da somit

$$7^{7^7} = 7^{4m-1} \equiv -1 \pmod 4, \text{ d.h. } 7^{7^7} = 4m' - 1$$

(m' natürlich) ist, folgt weiter

$$7^{7^{7^7}} = 7^{7^{4m-1}} = 7^{4m'-1} \equiv 43 \pmod{100}.$$

Daher ist die zu untersuchende Zahl

$$7^{7^{7^7}} - 7^{7^7} \equiv 43 - 43 \equiv 0 \pmod{100},$$

d.h. durch 100 teilbar; jede ihrer letzten beiden Ziffern ist also 0.

L 11/12;II

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

4\. a) Es sei g (x) =g(x+1) ~~periodisch mit der Periodenlänge 1,~~ (8 Punkte)
dann erhält man aus Gleichung (1)
$(x + 1) \cdot f(x) \cdot g(x) = f(x + 1) \cdot g(x + 1)$,
d.h. $(x + 1) \cdot \varphi(x) = \varphi(x + 1)$.

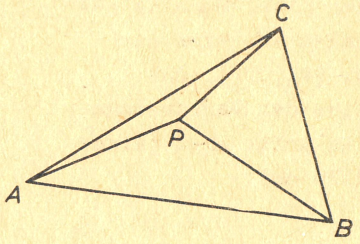
b) Setzt man voraus, daß die Gleichungen (1) und (2) beide für alle positiven x erfüllt sind, so erhält man
$\varphi(x + 1) = (x + 1) \cdot f(x) \cdot g(x)$
also
$f(x + 1) \cdot g(x + 1) = f(x + 1) \cdot g(x)$
und wegen
$f(x) \neq 0$ für alle positiven x schließlich $g(x + 1) = g(x)$,
~~womit die Periodizität von g (x) bewiesen ist.~~

5\. Man bezeichne die sechs Farben mit $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $F_5$, $F_6$ und die Stoffe entsprechender Farbzusammenstellung mit $(F_1, F_2)$, $(F_1, F_3)$ usw. (6 Punkte)
Zunächst lassen sich nach Voraussetzung die Bezeichnungen so wählen, daß eine Stoffsorte in der Farbzusammenstellung $(F_5, F_6)$ vorkommt. Wenn auch die Stoffsorten $(F_1, F_2)$ und $(F_3, F_4)$ oder die Stoffsorten $(F_1, F_3)$ und $(F_2, F_4)$ hergestellt wurden, so gelangt man bereits zu den gewünschten drei Stoffsorten, in denen alle sechs Farben vertreten sind. Wenn es aber nicht der Fall ist, so fehlt mindestens eine der Farbzusammenstellungen $(F_1, F_2)$, $(F_3, F_4)$, und gleichzeitig fehlt mindestens eine der Farbzusammenstellungen $(F_1, F_3)$, $(F_2, F_4)$. Es tritt also (mindestens) einer der folgenden 4 Fälle auf:

1.) Es fehlen $(F_1, F_2)$, $(F_1, F_3)$.
2.) Es fehlen $(F_1, F_2)$, $(F_2, F_4)$.
3.) Es fehlen $(F_3, F_4)$, $(F_1, F_3)$.
4.) Es fehlen $(F_3, F_4)$, $(F_2, F_4)$.

In jedem dieser 4 Fälle läßt sich durch geeignete Umnumerierung von $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$ erreichen, daß $(F_1, F_2)$ und $(F_1, F_3)$ fehlen.
Da jede Farbe nach Voraussetzung mit mindestens noch drei weiteren Farben gemeinsam vorkommt, kann jede Farbe höchstens mit zwei weiteren Farben gepaart im Sortiment nicht vertreten sein. Deshalb muß es nun eine Stoffsorte von der Farbenzusammenstellung $(F_1, F_4)$ geben. Schließlich gibt es nur noch folgende zwei Möglichkeiten: Entweder es kommt eine Stoffsorte $(F_2, F_3)$ vor; dann erfüllen die Stoffe $(F_1, F_4)$, $(F_2, F_3)$, $(F_5, F_6)$ die Behauptung. Oder aber $(F_2, F_3)$ kommt nicht vor. Da dann Stoffe weder in der Farbzusammenstellung $(F_1, F_2)$ noch in $(F_2, F_3)$ hergestellt wurden, so muß es $(F_2, F_5)$ geben. Da ferner dann die Farbzusammenstellungen $(F_1, F_3)$ und $(F_2, F_3)$ ebenfalls nicht vorkommen, so folgt die Existenz von $(F_3, F_6)$. Also bilden $(F_1, F_4)$, $(F_2, F_5)$, $(F_3, F_6)$ die gewünschte Stoffauswahl. Nunmehr sind alle Möglichkeiten behandelt, d. h. man kann stets drei Stoffsorten finden, in denen alle sechs Farben auftreten.

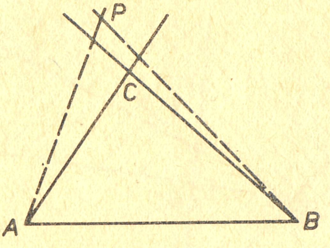
6. <u>Fall 1:</u> Die Aufgabe ist stets lösbar, wenn vier der gegebenen Punkte sich so mit A, B, C, P bezeichnen lassen, daß P im Inneren des Dreiecks $\triangle$ ABC liegt. Verbindet man nämlich P mit A, B und C, dann ist die Größe mindestens eines von zwei solchen Verbindungsstrecken einge- 8 Punkte




L 11/12; 6a

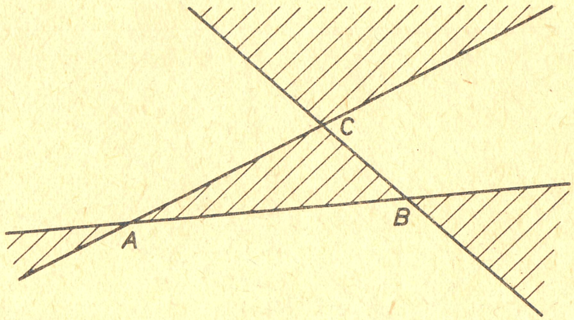
schlossenen Winkels mindestens $120^{\circ}$; denn die Summe dieser drei Winkel am Punkt P beträgt $360^{\circ}$ (s. Abb. L 11/12;6a).

Fall 1 liegt insbesondere dann vor, wenn vier der gegebenen Punkte sich so mit A, B, C, P bezeichnen lassen, daß P zwischen den Verlängerungen zweier Seiten des Dreiecks $\Delta$ ABC über eine und dieselbe Ecke (z.B. über C) hinaus liegt (s. Abb. L 11/12;6b). Die Ecke C liegt dann im Inneren des Dreiecks $\Delta$ ABP.




L 11/12;6b

Somit erhält man für Punkte, die im schraffierten Teil der Abb. L 11/12;6c liegen, stets die geforderte Lösung.

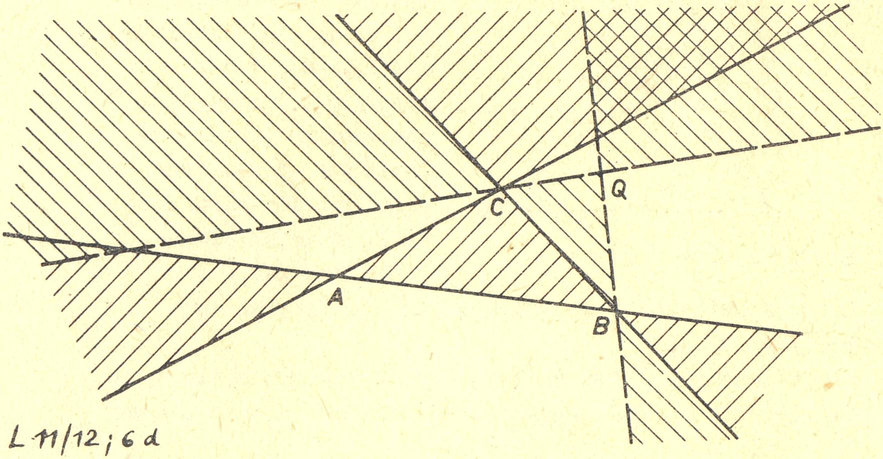



L 11/12;6c

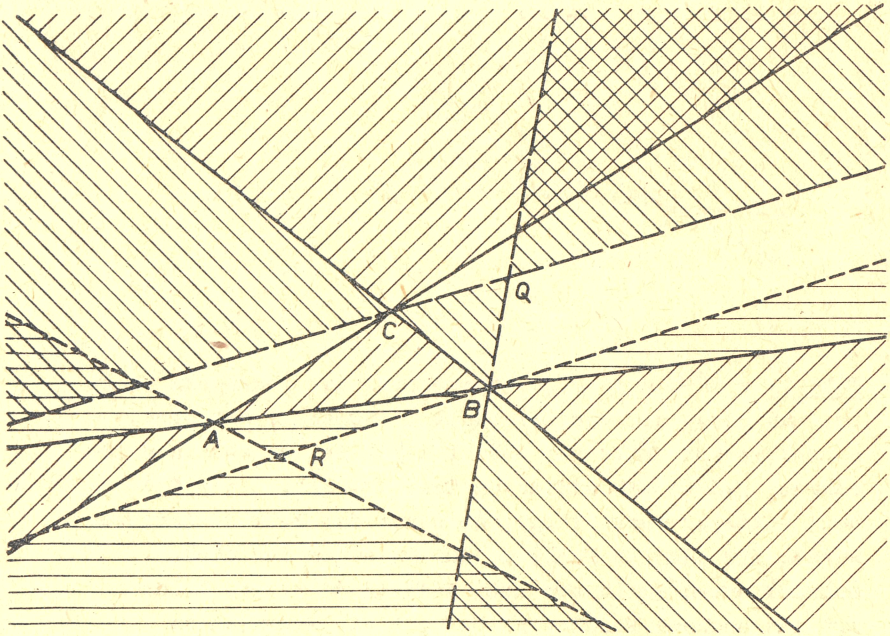
<u>Fall 2:</u> Sind nun A, B, C irgend drei der gegebenen Punkte, und liegt ein vierter Punkt Q innerhalb der nicht schraffierten Teile der Abb. L 11/12;6c, so kann man annehmen, daß im schraffierten Teil der Abb. L 11/12;6d kein weiterer Punkt liegt, da sonst der Fall 1 eintreten würde. Ein fünfter Punkt R, der in einem der nicht schraffierten Teile von Abb. L 11/12;6d liegt, bildet mit den anderen Punkten A, B, C, Q die Ecken eines konvexen Fünfecks. Der sechste gegebene Punkt schließlich

L 11/12;II

liegt entweder im schraffierten Teil der Abb.L 11/12;6e, was wieder auf den Fall 1 führt, oder aber er liegt in einem der nichtschraffierten Teile der Abb. L 11/12;6e. Dann bilden die sechs Punkte aber ein konvexes Sechseck.




L 11/12; 6 d




L 11/12; 6 e

Das Sechsfache des größten Winkels dieses Sechsecks (oder das Sechsfache eines seiner größten Winkel) ist mindestens so groß wie die Winkelsumme des Sechsecks, also $720^\circ$. Demnach ist mindestens einer dieser Winkel mindestens $120^\circ$ groß, w.z.b.w.

2. Beweisvariante:

(I) Man kann geeignete unter den 6 gegebenen Punkten so auswählen, daß sie die Ecken eines konvexen Polygons bilden, das alle 6 Punkte auf dem Rande oder im Innern enthält.

Beweis: Es sei g eine Verbindungsgerade irgend zweier der gegebenen Punkte. Zu g gibt es zwei Parallelen $g_1$, $g_2$ derart, daß auf $g_1$ und $g_2$ je mindestens ein gegebener Punkt liegt, während alle übrigen der gegebenen Punkte in dem Parallelstreifen $\mathfrak{T}(g)$ zwischen $g_1$ und $g_2$ liegen. ($g_1$, $g_2$ gehen nämlich durch die Punkte mit je auf ihrer Seite maximaler Entfernung von g.) - Bildet man diese Parallelstreifen $\mathfrak{T}(g)$ für alle möglichen Verbindungsgeraden g je zweier gegebener Punkte, so hat die Menge $\mathfrak{P}$ der in allen $\mathfrak{T}(g)$ enthaltenen Punkte die behaupteten Eigenschaften.

Bemerkung: Anschaulich erhält man $\mathfrak{P}$, wenn man sich einen Faden erst in genügend großer kreisförmiger Schlinge um alle 6 Punkte gelegt und dann so eng wie möglich zusammengezogen denkt. Die Punkte stelle man sich dabei als Stifte vor, die aus einem ebenen Brett herausragen. (Eine solche anschauliche Argumentation sollte in diesem Zusammenhang als zulässiger Lösungsweg bewertet werden, obgleich sie streng genommen kein mathematisch vollständiger Beweis ist.)

(II) Sind alle 6 gegebenen Punkte Ecken von $\mathfrak{P}$, so liegt der Fall 2 der 1. Beweisvariante (konvexes Sechseck) vor.