

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesenen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Drei gleichgroße Holzkugeln mit einem Radius der Länge  $r$ , die sich paarweise berühren, liegen auf einer ebenen Tischplatte. Wie groß ist der Radius einer vierten Kugel, die alle drei Kugeln und die Tischplatte gleichzeitig berührt?
2. Es ist das Produkt  $\sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ$  in einen Ausdruck umzuformen, der aus natürlichen Zahlen lediglich durch Anwendung der Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens sowie des Radizierens mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet werden kann.  
 (Beispiel dafür:  $\sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}$ .)
3. Wie lauten (in dekadischer Darstellung) die letzten beiden Ziffern der Zahl

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7^7 \\ 7^7 \end{array} - \begin{array}{r} 7 \\ 7^7 \\ 7^7 \end{array} ?$$



Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesenen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

4. Es sei  $y = f(x)$  eine für alle reellen Zahlen  $x$  definierte Funktion, die für alle  $x$  folgende Gleichung erfüllt:

$$f(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \quad (1).$$

Außerdem sei  $y = g(x)$  eine ebenfalls für alle reellen  $x$  definierte Funktion.

Für alle  $x$  sei  $f(x)$  von 0 verschieden.

Beweisen Sie: Die Funktion  $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$  erfüllt genau dann für alle reellen  $x$  die Gleichung

$$\varphi(x+1) = (x+1) \cdot \varphi(x), \quad (2)$$

wenn  $g(x)$  eine ~~periodische~~ Funktion mit der Periodenlänge 1 ist.

5. In einer Weberei wird Garn von genau sechs verschiedenen Farben zu Stoffen von je genau zwei verschiedenen Farben verarbeitet. Jede Farbe kommt in mindestens drei verschiedenen Stoffsorten vor. (Dabei gelten zwei Stoffsorten dann und nur dann als gleich, wenn in ihnen dieselben zwei Farben auftreten.)

Beweisen Sie, daß man drei verschiedene Stoffsorten derart finden kann, daß in ihnen alle sechs Farben auftreten!

6. Beweisen Sie, daß es stets möglich ist, von 6 Punkten einer Ebene, wobei keine 3 Punkte kollinear (d.h. auf derselben Geraden gelegen) seien, 3 Punkte derart auszuwählen, daß diese die Ecken eines Dreiecks bilden, das einen stumpfen Winkel von mindestens  $120^\circ$  enthält!