L 10; I

# VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
## 4. Stufe (DDR-Olympiade)
## Lösungen und Punktbewertung
## Olympiadeklasse 10 — 1. Tag —

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

1. Wenn $a$ eine natürliche Zahl ist, so daß $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind, dann folgt einerseits die Teilbarkeit von $a^{101} - 2a$ durch 73, also die Existenz einer ganzen Zahl r mit 6 Punkte

$$a^{101} - 2a = 73\,r$$

und andererseits die Existenz einer ganzen Zahl s mit

$$\underline{a^{101} - 69 = 73\,s.}$$

Daraus folgt:

$$2a - 69 = 73\,(s - r),$$

also die Existenz einer ganzen Zahl t mit

$$2a - 69 = 73\,t,$$
$$2a = 69 + 73\,t,$$
$$2a = 69 + 73 + 73\,(t - 1),$$
$$2a = 142 + 73\,(t - 1).$$

Da $2a - 69$ ungerade ist, muß auch t eine ungerade Zahl sein.

Dann ist aber $t - 1$ gerade, also von der Form

$$t - 1 = 2n,\ n \text{ ganz}.$$

Dann gilt: $2a = 142 + 2n \cdot 73$,

also $a = 71 + 73n$.

Als Rest, den a bei Division durch 73 läßt, kommt demnach höchstens die Zahl 71 in Frage.

Zusätzlich+) wird noch gezeigt, daß 71 als Rest tatsächlich möglich ist, d.h. daß (mindestens) eine Zahl a mit den in der Aufgabe genannten Eigenschaften existiert. Dies kann folgendermaßen geschehen:

+) Diese Ausführungen sind laut Aufgabenstellung vom Schüler nicht verlangt.

| Die Zahl | läßt wegen | bei Division durch 73 den Rest |
|---|---|---|
| $71^2$ | $71^2 = 69 \cdot 73 + 4$ | 4 |
| $71^8$ | $4^4 = 3 \cdot 73 + 37$ | 37 |
| $71^{16}$ | $37^2 = 18 \cdot 73 + 55$ | 55 |
| $71^{18}$ | $4 \cdot 55 = 3 \cdot 73 + 1$ | 1 |
| $71^{90}$ | $1^5 = 1$ | 1 |
| $71^{98}$ | $37 \cdot 1 = 37$ | 37 |
| $71^{100}$ | $4 \cdot 37 = 2 \cdot 73 + 2$ | 2 |
| $71^{101}$ | $71 \cdot 2 = 73 + 69$ | 69 |

Also hat die Zahl 71 alle in der Aufgabe genannten Eigenschaften. Die Lösung der Aufgabe lautet somit: Die Zahl $a$ läßt bei Division durch 73 den Rest 71.

2. (Bezeichnungen siehe Abb. L 10; 2a bis 2c). 7 Punkte
Es sei $s$ die auf der Grundlinie der Länge $a$ errichtete Höhe einer der Seitenflächen des Körpers, $V_1$ das Volumen des Behälters für die erste der beiden Lagen des Körpers und $V_2$ das Volumen des Behälters für die zweite Lage.
Berührt die Grundfläche des Körpers eine der Innenflächen des Behälters (Abb. L 10; 2a), dann hat der Behälter die Länge $a$, die Breite $a$ und die Höhe $h$, und es gilt:

$$V_1 = a^2 \cdot h.$$

Nun unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle:
Fall 1: Es sei $h \geq \frac{a}{2}$.
Berührt eine der Seitenflächen des Körpers eine der Innenflächen des Behälters (Abb. L 10; 2b), dann hat der Behälter die Breite $a$, ferner als Höhe $x$ die Länge des Lotes von $B$ auf die Ebene durch $ACA'$, sowie schließlich die Länge $s$; denn wegen $h \geq \frac{a}{2}$ ist $\overline{\sphericalangle A'CD} \leq 45^\circ$,+) also $\overline{\sphericalangle A'CB'} \leq 90^\circ$,

+) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

und daher ist die Projektion der Strecke A'B' auf die Gerade durch A', C nicht länger als s, so daß s als Länge des Behälters ausreicht. Somit gilt:

$$V_2 = s \cdot a \cdot x.$$

Nun gilt ferner

$$\Delta ABE \sim \Delta A'CD;$$

denn sie stimmen in den Winkeln überein.
Folglich gilt:

$$x : a = h : s,$$

also $$x = \frac{a \cdot h}{s}$$

und mithin

$$V_2 = a^2 \cdot h = V_1.$$

Das Volumen des Behälters ist für beide Lagen gleich groß.

<u>Fall 2:</u> Es sei $h < \frac{a}{2}$.
Berührt eine der Seitenflächen des Körpers eine der Innenflächen des Behälters (Abb. L 10; 2c), dann hat der Behälter die Breite a, die Höhe x, für die wie im Fall 1

$$x = \frac{a \cdot h}{s}$$

ist, sowie als Länge die Projektion $s_1$ der Strecke A'B' auf die Gerade durch A', C; denn wegen $h < \frac{a}{2}$ ist $\overline{\measuredangle A'CD} > 45^\circ$, also $\overline{\measuredangle A'CB'} > 90^\circ$, und daher $s_1 > s$. Nunmehr gilt:

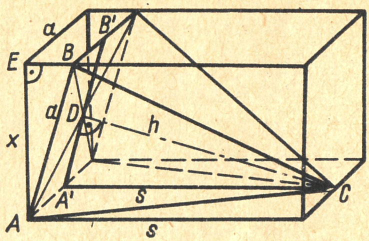
$$V_2 = s_1 \cdot a \cdot \frac{a \cdot h}{s} = a^2 \cdot h \cdot \frac{s_1}{s},$$

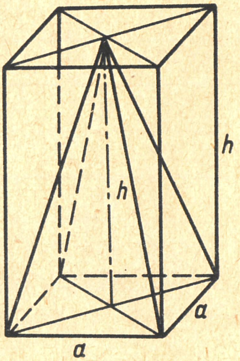
und wegen

$$s_1 > s \quad \text{ist} \quad \frac{s_1}{s} > 1, \text{ also}$$

$$V_1 < V_2 .$$

Der Behälter benötigt ein geringeres Volumen, wenn der Körper mit der Grundfläche eine der Innenflächen des Behälters berührt.



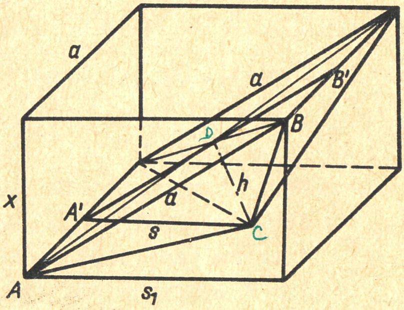




Abb. L 10;2 a, b, c

3. Eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten hat dann keine reellen Lösungen, wenn ihre Diskriminante $D < 0$ ist. — 6 Punkte

   Die Diskriminante der Gleichung (1) ist

   $$D = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$$
   $$= (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)$$
   $$= \left[(b - c)^2 - a^2\right] \cdot \left[(b + c)^2 - a^2\right].$$

   Nun gilt auf Grund der Dreiecksungleichung $b + c > a > 0$ und $0 < |b - c| < a$ und folglich $(b + c)^2 > a^2$ und $(b - c)^2 < a^2$, woraus sich $D < 0$ ergibt.

   Also folgt, daß die Gleichung (1) keine reellen Lösungen hat.

Kurlandt

L 10; II

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

4. I. Es seien c die Länge der Hypotenuse, a und b die Längen der Katheten, $\alpha$ und $\beta$ die Größen der spitzen Winkel und A der Flächeninhalt des betrachteten rechtwinkligen Dreiecks. 7 Punkte

Ferner sei $s = \sin\alpha + \sin\beta$. Dann gilt

$$s = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}, \text{ also } s^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2} = 1 + \frac{2\,ab}{a^2+b^2} = 1 + \frac{4\,A}{c^2},$$

also $A = \frac{1}{4} c^2 (s^2 - 1)$.

II. <u>1. Lösungsweg:</u> s kann genau diejenigen Werte annehmen, für die bei gegebenem $c > 0$ das Gleichungssystem

(1) $a^2 + b^2 = c^2$

(2) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = s$

positive Lösungen a, b besitzt.

Angenommen, für einen Wert von s hat (1), (2) positive Lösungen. Dann folgt aus (2)

$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 s^2$, also

(3) $2ab = c^2 (s^2 - 1)$ (was auch in den 1. Teil übernommen werden kann), und aus (1) weiter

(4) $(a-b)^2 = c^2 (2 - s^2)$.

Aus (2) folgt $s > 0$, aus (3), (4) aber $1 < s^2 \leqq 2$; somit kann (1), (2) höchstens für

(5) $1 < s \leqq \sqrt{2}$

positive Lösungen haben, und zwar, wie aus (4), also $a - b = \pm c\sqrt{2 - s^2}$, und (2) folgt, höchstens die Lösungen

(6) $a = \frac{c}{2}(s \pm \sqrt{2 - s^2}), \quad b = \frac{c}{2}(s \mp \sqrt{2 - s^2})$.

Ist umgekehrt $s$ irgend eine Zahl, für die (5) gilt, so folgt $0 \leqq 2 - s^2 < s^2$, also existiert $\sqrt{2 - s^2}$ und erfüllt, da $s > 0$ ist, die Ungleichung $\sqrt{2 - s^2} < s$. Daraus folgt, daß die Zahlen (6) positiv sind; durch Einsetzen bestätigt man, daß sie (1), (2) erfüllen.

Somit kann $s$ genau alle Werte (5) annehmen.

2. Lösungsweg: Die Höhe $h$ auf der Hypotenuse kann genau alle Werte $0 < h \leqq \frac{c}{2}$ annehmen, wie man etwa durch Konstruktion des Dreiecks aus $c$, $h$ zeigt. Daher kann $A = \frac{1}{2}\,ch$ genau alle Werte $0 < A \leqq \frac{1}{4}\,c^2$, wegen

$A = \frac{1}{4}\,c^2\,(s^2 - 1)$ also $s^2 - 1$ genau alle Werte

$0 < s^2 - 1 \leqq 1$ und somit $s$ wegen $s > 0$ genau alle Werte

$1 < s \leqq \sqrt{2}$ annehmen.

5. Es seien 8 Punkte

$\overline{W_2W_3} = s_1$, $\overline{W_3W_1} = s_2$, $\overline{W_1W_2} = s_3$,

$\overline{BW_1} = z_1$, $\overline{BW_2} = z_2$, $\overline{BW_3} = z_3$,

$\overline{\sphericalangle W_3W_1W_2} = \varphi_1$, $\overline{\sphericalangle W_1W_2W_3} = \varphi_2$, $\overline{\sphericalangle W_2W_3W_1} = \varphi_3$. +)

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist Punkt B der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\Delta W_1W_2W_3$. Infolgedessen sind $W_1B$, $W_2B$ und $W_3B$ die Winkelhalbierenden dieses Dreiecks, und es gilt nach Voraussetzung

$$s_1 < s_2 < s_3$$

und damit $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$, da in jedem Dreieck der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüberliegt.

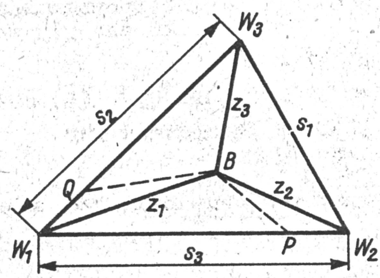



Abb. L 10;5

+) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Wegen $\frac{1}{2}\varphi_1 < \frac{1}{2}\varphi_2 < \frac{1}{2}\varphi_3$ gilt in den Teildreiecken $\Delta W_2W_3B$, $\Delta W_3W_1B$ und $\Delta W_1W_2B$ dann

$$z_3 < z_2, \quad z_3 < z_1 \quad \text{und} \quad z_2 < z_1,$$

und damit

$$z_3 < z_2 < z_1.$$

Laut Aufgabe sind sechs Fahrrouten möglich. Es seien $r_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$ die Längen dieser Routen. Dann gilt:

$$r_1 = z_1 + s_3 + s_1 + z_3$$
$$r_2 = z_1 + s_2 + s_1 + z_2$$
$$r_3 = z_2 + s_3 + s_2 + z_3$$
$$r_4 = z_2 + s_1 + s_2 + z_1$$
$$r_5 = z_3 + s_2 + s_3 + z_2$$
$$r_6 = z_3 + s_1 + s_3 + z_1$$

Hierbei ist $r_1 = r_6$, $r_2 = r_4$ und $r_3 = r_5$.

Der Vergleich von $r_1$, $r_2$ und $r_3$ untereinander kann folgendermaßen durchgeführt werden:

Wählt man

$P$ $\qquad\qquad$ $Q$

auf der Strecke

$W_1W_2$ $\qquad\qquad$ $W_3W_1$

so, daß

$\overline{W_1P} = \overline{W_1W_3}$, $\qquad\qquad$ $\overline{W_3Q} = \overline{W_3W_2}$,

also

$\overline{PW_2} = s_3 - s_2$ $\qquad\qquad$ $\overline{QW_1} = s_2 - s_1$

wird, so ist

$\Delta W_1PB \cong \Delta W_1W_3B$ $\qquad\qquad$ $\Delta W_3QB \cong \Delta W_3W_2B$

(Übereinstimmung in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel), also

$\overline{PB} = z_3.$ $\qquad\qquad$ $\overline{QB} = z_2.$

Da in

$\Delta PW_2B$ $\qquad\qquad$ $\Delta QW_1B$

die Differenz zweier Seiten kleiner ist als die dritte, so ergibt sich

$z_2 - z_3 < s_3 - s_2$ $\qquad\qquad$ $z_1 - z_2 < s_2 - s_1$

und folglich

$r_1 - r_2 = (s_3 - s_2) - (z_2 - z_3) > 0.$ $\qquad\qquad$ $r_3 - r_1 = (s_2 - s_1) - (z_1 - z_2) > 0.$

Somit erhalten wir $r_2 < r_1 < r_3$. Es gibt folglich zwei kürzeste Fahrrouten, nämlich $BW_1W_3W_2B$ und $BW_2W_3W_1B$.

Diese unterscheiden sich nur in der Fahrrichtung voneinander; abgesehen von diesem Unterschied ist die Lösung der Aufgabe also eindeutig.

6. Angenommen, eine Zahl x erfüllt die gegebene Gleichung. Dann existieren die in der Gleichung vorkommenden Wurzelausdrücke, also gilt $x > 0$. 6 Punkte

Nach Multiplikation der gegebenen Gleichung mit $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ (dieser Ausdruck existiert, da er ebenfalls in der Gleichung vorkommt) erhält man

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \text{ also}$$

$$x + \sqrt{x} - \sqrt{(x^2 - x)} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x\,(x-1)} = x - \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Hieraus folgt:

$$x\,(x-1) = x^2 - x\sqrt{x} + \frac{x}{4},$$

$$x\sqrt{x} = \frac{5}{4}x, \text{ wegen } x \neq 0 \text{ also } \sqrt{x} = \frac{5}{4}.$$

Daher kann höchstens $x = \frac{25}{16}$ die gegebene Gleichung erfüllen.

Tatsächlich ist

$$\sqrt{\frac{25}{16}+\sqrt{\frac{25}{16}}} - \sqrt{\frac{25}{16}-\sqrt{\frac{25}{16}}}$$

$$= \sqrt{\frac{45}{16}} - \sqrt{\frac{5}{16}}$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

und

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\frac{25}{16}}{\frac{25}{16}+\sqrt{\frac{25}{16}}}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{25}{45}} = \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

also $x = \frac{25}{16}$ Lösung der Gleichung.