

A 10; I

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10

- 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Welchen Rest läßt eine natürliche Zahl a bei Division durch 73, wenn die Zahlen $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind?
2. Für einen Körper, der die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche und kongruenten Seitenflächen hat, soll ein quaderförmiger Behälter von möglichst kleinem Volumen angefertigt werden. Der pyramidenförmige Körper soll dabei so hineingelegt werden, daß er entweder mit seiner Grundfläche oder mit einer seiner Seitenflächen eine der Innenflächen des Behälters berührt.

Es sei h die Höhe des pyramidenförmigen Körpers und a die Seitenlänge seiner Grundfläche.

Untersuchen Sie, für welche dieser beiden Lagen der Behälter ein geringeres Volumen benötigt!

Dabei sind zweckmäßigerweise die Fälle $h \leq \frac{a}{2}$ zu unterscheiden.

3. Beweisen Sie folgende Behauptung:

Wenn a, b, c die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks sind, dann hat die Gleichung

$$(1) \quad b^2 x^2 + (b^2 + c^2 - a^2) x + c^2 = 0$$

keine reellen Lösungen.