VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Beweisen Sie folgende Aussage:
Die Winkelhalbierende je eines Innenwinkels jedes Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite in Abschnitte, von denen jeder kleiner ist als die dem Innenwinkel anliegende Dreiecksseite durch einen Endpunkt des betreffenden Abschnitts.

2. Es ist zu beweisen, daß $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ ist, wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind und $a \neq 1$, $b \neq 1$ ist!
(Sogenannte Kettenregel für Logarithmen.)

3. Ingelore sagt zu ihrer Schwester Monika: "Wir haben gestern im Mathematikunterricht Berechnungen an einer quadratischen Pyramide durchgeführt und dabei für das Volumen und den Oberflächeninhalt gleiche Maßzahlen erhalten. Ich weiß zwar noch, daß alle Maßzahlen natürliche Zahlen waren, kann mich aber nicht mehr daran erinnern, wie sie lauteten."
"Welche Maßzahlen meintest du, als du "alle Maßzahlen" sagtest?"
"Ich meinte die Maßzahlen der Seitenlänge der Grundfläche, der Höhe, des Volumens und des Oberflächeninhalts der Pyramide."
"Waren diese Stücke mit zusammenpassenden Maßeinheiten versehen, waren also z. B. die Längen in cm, der Oberflächeninhalt in cm^2 und das Volumen in cm^3 angegeben?"
"Ja, so war es."
Aus diesen Angaben kann Monika die Aufgabe rekonstruieren.
Wie kann das geschehen?

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

4. Gesucht sind alle diejenigen Tripel natürlicher Zahlen a_i $(i = 1, 2, 3)$, die die Gleichung

$$(*) \quad \sqrt{2a_1^2 - 2a_2^2} = a_3$$

erfüllen und für die außerdem $1 \leqq a_i \leqq 10$ gilt.

5. Für welches reelle a nimmt die Summe der Quadrate der Lösungen der Gleichung

$$x^2 + ax + a - 2 = 0$$

ihren kleinsten Wert an?

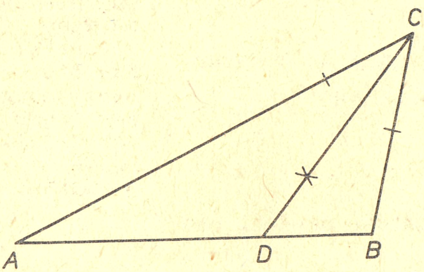
6. a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_c - h_b = 3$ cm; $b - c = 3{,}5$ cm und $a = 8$ cm! Dabei ist h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe und a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC und c die der Seite AB.

   b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1. Die zu beweisende Aussage besteht in mehreren Teilaussagen, von denen jede einzelne durch jeweils geeignete Wahl der Bezeichnungen auf folgende Behauptung zurückgeführt werden kann: 6 Punkte



L 10;1

Schneidet in einem Dreieck $\triangle ABC$ die Halbierende des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ die Seite AB im Punkt D, so ist $\overline{AD} < \overline{AC}$.

Beweis: Es ist $\overline{\sphericalangle ADC} > \overline{\sphericalangle DCB}$ *) (Satz über Außenwinkel im Dreieck $\triangle DBC$), also $\overline{\sphericalangle ADC} > \overline{\sphericalangle ACD}$ (da CD den Winkel $\sphericalangle ACB$ halbiert, also $\overline{AC} > \overline{AD}$ (da dem größeren Winkel im Dreieck $\triangle ADC$ die größere Seite gegenüberliegt).

*) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

2. Setzt man $\log_b c = x$ und $\log_a c = y$, so gilt nach der Definition des Logarithmus: $b^x = c$ und $a^y = c$. 6 Punkte
Folglich ist $b^x = a^y$ und (nach Logarithmieren) $\log_a b^x = \log_a a^y$.
Nach Anwendung des Gesetzes über das Logarithmieren einer Potenz erhält man

$$x \cdot \log_a b = y \cdot \log_a a$$

und wegen $\log_a a = 1$ endlich $x \log_a b = y$, d.h.

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c, \text{ w.z.b.w.}$$

Anderer Lösungsweg:

Es sei $b = a^x$ und $c = b^y$.

Dann ist $c = (a^x)^y = a^{xy}$ und
man erhält nach der Definition des Logarithmus:

$$xy = \log_a c \quad \text{oder} \quad \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.$$

3. Es sei a die Maßzahl der Länge der Grundkante und h die der Höhe der Pyramide (in cm). Dann ist die Maßzahl des Volumens (in cm^3) $V_P = \frac{1}{3}a^2h$ und die des Oberflächeninhaltes (in cm^2)

$$O_P = a^2 + 2a\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}.$$

8 Punkte, davon für die Gleichung für V_P und O_P und Gleichsetzung 2 Punkte. Für die Bestimmung der Länge der Grundkante 3 Punkte.

Nach den Bedingungen der Aufgabe sind a, h natürlich und ungleich 0, ferner soll gelten:

$V_P = O_P$, also

$$\frac{1}{3}a^2h = a\left(a + 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}\right).$$

Da $a \neq 0$ gilt, kann durch a dividiert werden, und man erhält

$$\frac{1}{3}ah = a + 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$$

Daraus folgt

$$ah - 3a = 6\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$$

und nach Quadrieren beider Seiten

$$a^2h^2 - 6a^2h + 9a^2 = 9a^2 + 36h^2$$ und weiter

$$a^2h^2 - 6a^2h = 36h^2.$$ Wegen $h \neq 0$ kann durch h dividiert werden, und es folgt

$$a^2(h-6) = 36h$$

$$a^2 = \frac{36h}{h-6}$$ sowie

$$a = 6\sqrt{\frac{h}{h-6}}.$$

Da a eine natürliche Zahl sein soll, muß $\frac{h}{h-6}$ das Quadrat einer natürlichen Zahl sein. Das heißt, es muß gelten $h > 6$, da sonst der Nenner nicht positiv würde. Die Substitution

L 10;I

$h - 6 = m$ (m natürlich) liefert

$$\frac{h}{h-6} = \frac{m+6}{6} = 1 + \frac{6}{m}.$$

Daher muß (m und folglich auch) $\frac{6}{m}$ ein positiver Teiler von 6, d.h. eine der Zahlen 1, 2, 3, 6 sein, und zwar so, daß $1 + \frac{6}{m}$ Quadratzahl wird. Von den Zahlen 2, 3, 4, 7 ist aber nur 4 Quadratzahl, was auf $\frac{6}{m} = 3$, $m = 2$, $h = 8$, $a = 12$ führt.

Umgekehrt ergibt sich aus $a = 12$, $h = 8$ in der Tat

$$V_P = O_P = 384.$$

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 – 2. Tag –

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

4. Die Gleichung (*) ist äquivalent mit 6 Punkte

$$2\,(a_1^2 - a_2^2) = a_3^2.$$

Daraus folgt, daß a_3^2 und damit auch a_3 durch 2 teilbar ist, also

$$a_3 = 2a' \quad (a' \text{ ganz}).$$

Somit ist

$$a_1^2 - a_2^2 = (a_1 - a_2)\cdot(a_1 + a_2) = 2a'^2,$$

und es sind wegen $a_3 \leq 10$ nur die Werte $a' = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$ möglich.

Also sind folgende Faktorenzerlegungen zu prüfen:

$$\begin{aligned} &&&& 1\cdot 2 &= 2\\ && 1\cdot 8 &= 2\cdot 4 &&= 8\\ 1\cdot 18 &= 2\cdot 9 &&= 3\cdot 6 &&= 18\\ 1\cdot 32 &= 2\cdot 16 &&= 4\cdot 8 &&= 32\\ 1\cdot 50 &= 2\cdot 25 &&= 5\cdot 10 &&= 50. \end{aligned}$$

Dabei ist $p = a_1 - a_2$ jeweils der kleinere und $q = a_1 + a_2$ der größere Faktor, und wegen

$a_1 = \frac{q+p}{2}$ scheiden alle Fälle mit $q + p$ ungerade aus.

Es bleiben also genau die drei Fälle

$$p\cdot q = 2\cdot 4$$
$$p\cdot q = 2\cdot 16$$
$$p\cdot q = 4\cdot 8$$

übrig. Sie ergeben genau die Lösungstripel:

$(a_1,\ a_2,\ a_3) = (3,\ 1,\ 4)$ bzw. $(9,\ 7,\ 8)$ bzw. $(6,\ 2,\ 8)$.

Die Probe erweist die Richtigkeit der Lösungen.

5. Es sei a eine reelle Zahl, für die die Gleichung 6 Punkte

reelle Lösungen, etwa die Zahlen x_1 und x_2, hat.

(Dabei sei entweder $x_1 \neq x_2$, oder aber $x_1 = x_2$ sei die einzige Lösung der Gleichung.)

Dann gilt

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

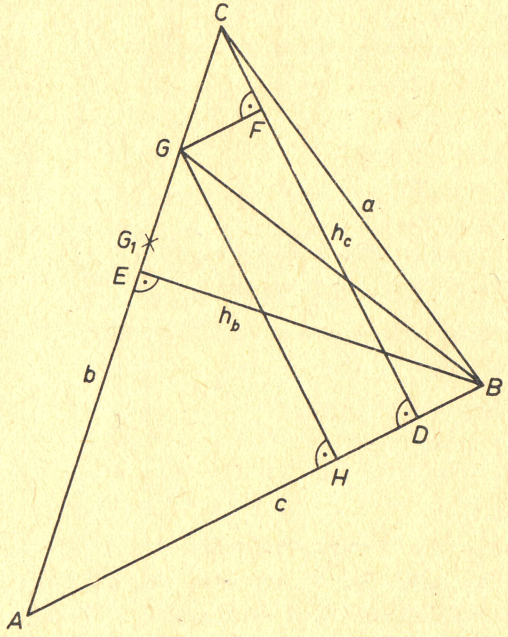
und nach dem Satz des Vieta:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (-a)^2 - 2\,(a - 2) \\ &= a^2 - 2a + 4 \\ &= (a - 1)^2 + 3. \end{aligned}$$

Die Summe nimmt mithin für $a = 1$ und nur für dieses a ihren kleinsten Wert an, falls die Gleichung $x^2 + ax + a - 2 = 0$ für $a = 1$ Lösungen besitzt. Da dies in der Tat der Fall ist ($x^2 + x - 1 = 0$ hat die Lösung $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$) ist $a = 1$ und nur dies der gesuchte Wert.

6.

8 Punkte, davon für Analyse und Beweis 3 Punkte, für Konstruktion und Beschreibung 3 Punkte und für Diskussion der Lösung 2 Punkte.



L 10;6a

(I) Angenommen, Δ ABC sei ein Dreieck der geforderten Art (Abb. L 10;6a) mit $\overline{CD} = h_c$ und $\overline{BE} = h_b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ und $\overline{AC} = b$.

Auf CD trage man von D aus h_b mit dem Endpunkt F ab.
Dann gilt: $\overline{CF} = h_c - h_b$.
Die auf CD in F errichtete Senkrechte schneide AC in G. Der Fußpunkt des von G auf AB gefällten Lotes sei H.
Dann gilt: $\overline{GH} = h_b$
und es ist

$\triangle GHA \cong \triangle BEA$; denn $\sphericalangle GHA \cong \sphericalangle BEA$ als rechte Winkel,
$\sphericalangle GAH \cong \sphericalangle EAB$
$\overline{GH} = \overline{EB} = h_b$.

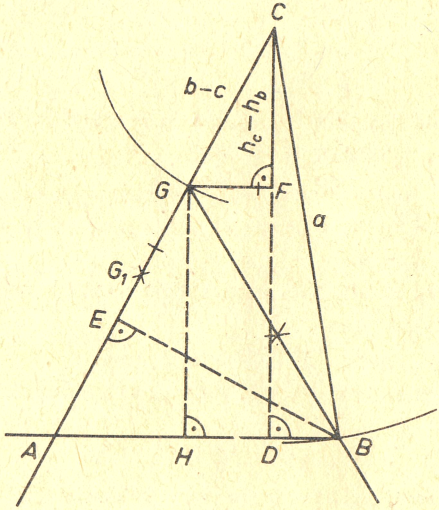
Daraus folgt: $\overline{AG} = \overline{AB}$ (1)
und damit $\overline{CG} = b - c$.
Weiterhin ist $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle FGC$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und
$\overline{\sphericalangle FGA} = 180^\circ - \alpha$, wenn $\overline{\sphericalangle CAB} = \alpha$ ist.
Nun ist wegen (1) das Dreieck $\triangle AGB$ gleichschenklig und daher
$\overline{\sphericalangle AGB} = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.
Also ist GB die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle FGA$.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ höchstens dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion entsteht:
Das Teildreieck $\triangle FGC$ wird aus $b - c$, $h_c - h_b$ und dem rechten Winkel bei F konstruiert, und das Teildreieck $\triangle CGB$ danach aus a, $b - c$ und
$\overline{\sphericalangle CGB} = \overline{\sphericalangle CGF} + \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle FGA}$:
(Abb. L 10; 6b)
Man zeichnet $\overline{CF} = h_c - h_b$.
Punkt G liegt:
1. Auf dem Kreisbogen mit $b - c$ um C,
2. auf der Senkrechten, errichtet auf CF in F.

Punkt B liegt:
1. Auf dem Kreisbogen mit a um C,
2. auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle G_1GF$, wobei G_1 ein Punkt auf der Verlängerung von CG über G hinaus ist.

Punkt A liegt:

1. auf der Verlängerung von CG über G hinaus
2. auf der Parallelen durch B zu GF.



L 10;6 b

(III) Weiter gilt: Wird ein Dreieck Δ ABC durch diese Konstruktion gewonnen, so entspricht es den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis: Laut Konstruktion ist $\overline{CB}$ = a. Ferner ist $\overline{\sphericalangle AGB}$ = $\overline{\sphericalangle BGF}$ (nach Konstruktion) = $\overline{\sphericalangle ABG}$ (Wechselwinkel), also Δ ABG gleichschenklig mit (1); daher ist $\overline{CG}$ = b − c. Aus dem gleichen Grunde ist $\overline{BE}$ = $\overline{GH}$ = h_b. Das Viereck GHDF ist nach Konstruktion ein Rechteck, und daher ist auch $\overline{GH}$ = $\overline{FD}$ = h_b. Also ist $\overline{CF}$ = $h_c - h_b$.

(IV) Durch die gegebenen Stücke ist das Dreieck Δ ABC eindeutig (bis auf Kongruenz) bestimmt, da die gegebenen Stücke die Bedingungen $b - c > h_c - h_b$ und $a > b - c$ erfüllen. Ist (mindestens) eine dieser Bedingungen verletzt, so existiert kein Dreieck Δ ABC, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.