A 10 VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 10

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. In

$$\begin{array}{r} \text{F U E N F} \\ + \quad \text{Z W E I} \\ \hline \text{S I E B E N} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.
Untersuchen Sie, wieviele Lösungen die Aufgabe hat!

2. Gegeben sei ein Rechteck ABCD. Der Mittelpunkt von AB sei M. Man verbinde C und D mit M und A mit C. Der Schnittpunkt von AC und MD sei S.
Ermitteln Sie das Verhältnis des Flächeninhaltes des Rechtecks ABCD zum Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle$ SMC!

3. Beweisen Sie, daß für jedes natürliche n, $n > 1$, die Zahl

$$2^{2^n} + 1$$

mit der Ziffer 7 endet!

4. Auf einem ebenen Tisch liegen 4 Holzkugeln, von denen jede den Radius der Länge r hat und die sich gegenseitig so berühren, daß ihre Berührungspunkte mit der Tischplatte die Ecken eines Quadrates bilden. Auf die entstehende mittlere Lücke wird eine fünfte Holzkugel mit gleichem Radius gelegt.
Geben Sie den Abstand d des höchsten Punktes dieser fünften Kugel von der Tischebene an!

L 10 VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Angenommen, die Bedingungen der Aufgabe sind erfüllbar, dann sind F, U, E, N, Z, W, I, S, B sämtlich kleiner oder gleich 9, und es gilt:

(1) $S \neq 0$ und $S = 1$, da $U + Z < 20$ ist und
$F + 1 \leqq 10$ sein muß. 2 Punkte

(2) $F = 9$, da $F + 1 \geqq 10$ sein muß. 2 Punkte

Daraus folgt

(3) $F + 1 = 10$ und daraus wiederum

(4) $I = 0$.

Aus der letzten Spalte der Aufgabe folgt, daß
$F + I = N$, also wegen (4)
$F = N$ ist.

Da nach Voraussetzung $F \neq N$ sein muß, sind die Bedingungen der Aufgabe nicht sämtlich gleichzeitig erfüllbar, d.h. die Aufgabe hat keine Lösung. <u>4 Punkte</u>

zus. 8 Punkte

2. Bezeichnet man die Längen der Seiten des Rechtecks ABCD mit a und b, so gilt für den Flächeninhalt des Rechtecks $I\,(ABCD) = a \cdot b$. 10 Punkte

Ferner gilt $\triangle ASM \sim \triangle DSC$, da
$\measuredangle ASM \cong \measuredangle DSC$ (Scheitelwinkel) und
$\measuredangle SAM \cong \measuredangle DCS$ (Wechselwinkel) sind.

Weil M Mittelpunkt von AB ist, gilt
$\overline{AM} : \overline{CD} = 1 : 2$.

Ferner ist $I\,(\triangle AMC) = \frac{1}{4}\, a \cdot b$, und wegen
$\overline{SM} : \overline{SD} = 1 : 2$ (Strahlensatz) gilt
$I\,(\triangle AMS) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{3} = \frac{1}{12}\, a \cdot b$.

Somit erhält man $I\,(\triangle SMC) =$
$= I\,(\triangle AMC) - I\,(\triangle AMS)$
$= \frac{1}{4}\, a \cdot b - \frac{1}{12}\, a \cdot b = \frac{1}{6}\, a \cdot b$.

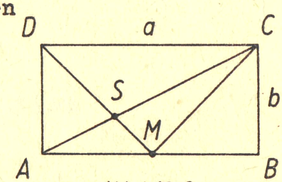

Abb. L 10;2

Mithin gilt I (ABCD) : I ($\triangle$SMC) = 6 : 1.

3. Für $n \geqq 2$ gilt: 11 Punkte

$$2^{2^n} = 2^{4 \cdot 2^{n-2}} = 16^{2^{n-2}}$$

Da jede Potenz von 16 mit 6 endet, ist die letzte Ziffer von 2^{2^n} im Falle $n \geqq 2$ stets die 6 und die von $2^{2^n} + 1$ demzufolge die 7.

4. Das durch die Berührungspunkte gebildete Quadrat (Abb. L 10;4a) hat die Seitenlänge 2 r und die Diagonalenlänge $2\,r\sqrt{2}$. Ein senkrecht zur Tischebene geführter, die Diagonale M_1M_3 enthaltender Schnitt ergibt folgendes Bild (siehe Abb. L 10;4b): 11 Punkte

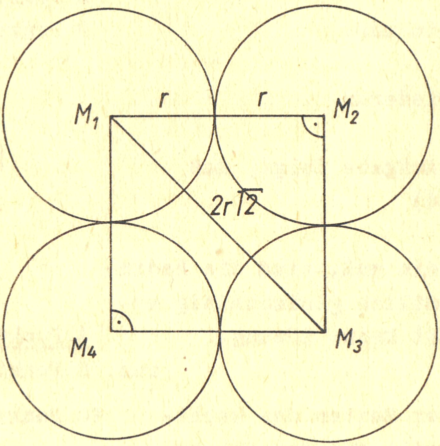

Abb. L 10; 4a

Da das Dreieck $\triangle M_1M_3M_5$ gleichschenklig ist und die Seitenlängen $\overline{M_1M_3} = 2\,r\sqrt{2}$, $\overline{M_1M_5} = \overline{M_3M_5} = 2r$ hat, so ist es gleichschenklig-rechtwinklig; das Lot von MS auf M_1M_3 hat folglich die Länge $r\sqrt{2}$. Der gesuchte Abstand d beträgt daher

$d = r + r\sqrt{2} + r = r\,(2 + \sqrt{2})$.

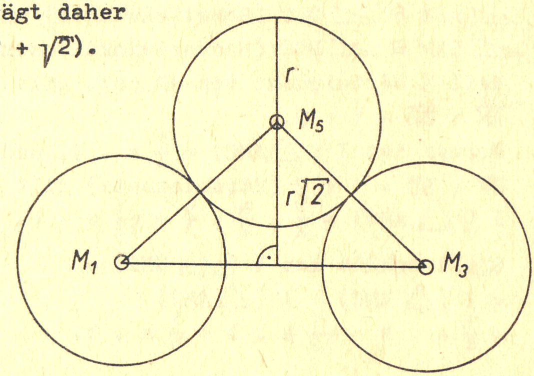

Abb. L 10; 4b