A 9;I VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Es sind ohne Benutzung der Zahlentafel alle vierstelligen Quadratzahlen zu ermitteln, deren erste zwei und letzte zwei Grundziffern jeweils einander gleich sind!

2. Auf einem (rechteckigen) Billardtisch ABCD befindet sich im Punkt P eine Kugel.
Nach welchem Punkte von AB muß diese gestoßen werden, damit sie erst der Reihe nach genau je einmal an den Seiten AB, BC, CD und DA des Tisches reflektiert wird und dann genau wieder im Punkt P eintrifft?

3. Man denke sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, aufsteigend der Größe nach geordnet, angeschrieben. Die dabei insgesamt aufgeschriebenen Ziffern denke man sich in unveränderter Reihenfolge zur Ziffernfolge der hiermit erklärten Zahl
$$1234567891011121314\ldots\ldots979899100$$
zusammengestellt. Aus ihr sollen genau 100 Ziffern so gestrichen werden, daß die restlichen Ziffern in gleicher Reihenfolge eine möglichst große Zahl bilden.
Wie lautet diese?

4. Man ermittle alle Tripel natürlicher Zahlen (a,b,c), für die $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ gilt.

Zwei Tripel (a_1,b_1,c_1) und (a_2,b_2,c_2) heißen dabei genau dann gleich, wenn $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ und $c_1 = c_2$ ist.

5. Von einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Seitenlängen a, b und c bekannt.

Berechnen Sie die Länge s_c der Seitenhalbierenden der Seite AB!

6. Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-\frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}$$

erfüllen.

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe

1. Es sei x die erste und y die letzte Ziffer einer derartigen Quadratzahl z. 6 Punkte

Dann gilt

$$z = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y = 11\,(100\,x+y)$$
mit $1 \leqq x \leqq 9$ und $0 \leqq y \leqq 9$.

Daraus folgt $11 \mid z$ und, da z Quadratzahl und 11 Primzahl ist, sogar $11^2 \mid z$.
Somit muß gelten $11 \mid 100\,x + y$.
Nun ist aber $100x + y = 99x + x + y$, und somit $11 \mid x + y$.
Wegen der Einschränkungen für x und y kommt nur $1 \leqq x + y \leqq 18$ und damit $x + y = 11$ in Frage.
Daraus folgt $100x + y = 99x + x + y = 11\,(9x + 1)$ und somit $z = 11^2\,(9x + 1)$.
Da z Quadratzahl ist, muß auch $9x + 1$ Quadratzahl sein.
Wegen $1 \leqq x \leqq 9$ ist dies (wie man z.B. durch Berechnung der Zahlen $9x + 1$ für $x = 1, \ldots, 9$ feststellen kann) nur für $x = 7$ der Fall.
Umgekehrt führt $x = 7$ in der Tat wegen $9 \cdot 7 + 1 = 64$ auf die Quadratzahl $z = 121 \cdot 64 = 7744 = 88^2$.
Diese ist somit die einzige vierstellige Quadratzahl mit den geforderten Bedingungen.

2. Es seien Q, R, S, T die Reflexionspunkte an den Seiten AB, BC, CD, DA. 8 Punkte
Sie bilden das Viereck QRST.
Nach dem Reflexionssatz gilt, wenn die Reflexionswinkel die in der Abbildung angegebenen Größen haben:

$$\alpha_1 = \alpha_2;\quad \beta_1 = \beta_2;\quad \gamma_1 = \gamma_2;\quad \delta_1 = \delta_2 \qquad (1)$$

L 9;1

Es sei U der Schnittpunkt der Verlängerungen von AB über B hinaus und SR über R hinaus. Dann gilt für die Größen der auftretenden Winkel:

$$\begin{aligned}\varphi_u &= 90^\circ - \varphi_R \\ &= 90^\circ - \beta_2 \\ &= 90^\circ - \beta_1 \quad \text{(nach (1))}\end{aligned}$$

und weiterhin

$$\alpha_2 = 90^\circ - \beta_1$$

sowie

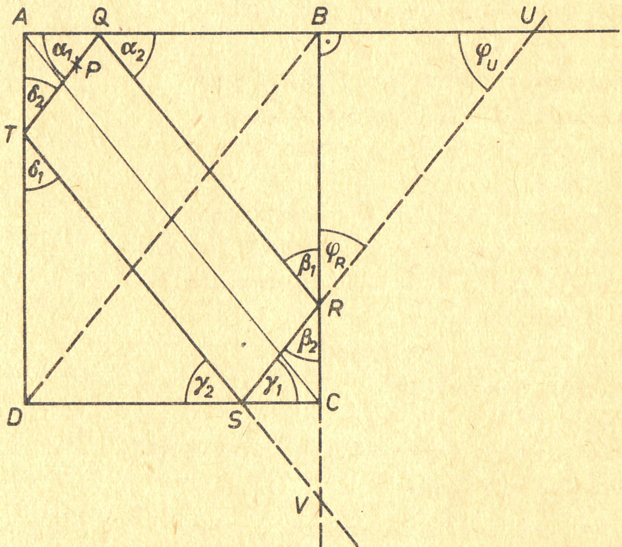
$$\alpha_1 = 90^\circ - \beta_1 \quad \text{(nach (1))}.$$

Daraus folgt

$$\alpha_1 = \varphi_u$$

und damit

$$TQ \parallel SR \qquad (2)$$



L 9;2

Es sei V der Schnittpunkt der Verlängerungen von BC über C hinaus und TS über S hinaus. Dann kann analog gezeigt werden, daß $TS \parallel QR$ gilt. (3)

Aus (2) und (3) folgt, daß das Viereck QRST ein Parallelogramm ist. Damit gilt $\overline{QR} = \overline{TS}$ (4)

Also ist $\triangle QRB \cong \triangle TSD$ (s w w).

Daraus folgt: $\overline{BR} = \overline{DT}$ (5)

Weiterhin gilt $\triangle QAT \sim \triangle BQR$; denn sie stimmen in den Winkeln überein.

Also gilt: $\overline{AQ} : \overline{AT} = \overline{QB} : \overline{BR}$

$= \overline{QB} : \overline{DT}$ (nach (5)). (6)

Aus (6) und der Umkehrung des 1. Strahlensatzes folgt damit $TQ \parallel DB$. (7)

Die Billardkugel kann also höchstens dann den vorgeschriebenen Verlauf nehmen, wenn sie von P aus parallel zur Diagonalen DB des Billardtisches ABCD gegen die Seite AB gestoßen wird.

Umgekehrt, wenn die Kugel in dieser Richtung gestoßen wird und

(Fall 1:) P innerhalb des Dreiecks $\triangle ABD$ liegt, so trifft sie nach je genau einmaliger Reflexion an AB, BC, CD, DA wieder in P ein, falls sie weit genug rollt.

Beweis: Nach Voraussetzung schneidet die Parallele durch P zu DB die Seite AB in einem inneren Punkte Q. Wegen des Reflexionsgesetzes einerseits und der Gleichheit der Winkel $\sphericalangle ABD$, $\sphericalangle BAC$ andererseits folgt, daß die Kugel dann parallel zu AC weiterläuft, und die Parallele durch Q zu AC wiederum schneidet die Seite BC in einem inneren Punkte R. So schließt man weiter und erhält innere Punkte S, T, Q_1 auf den Seiten CD, DA, AB als weitere Bahnpunkte (zugleich als Reflexionspunkte in dieser Reihenfolge), für die $QR \parallel TS \parallel AC$ und $SR \parallel TQ_1 \parallel DB$ gilt. Nun folgt einerseits

$\overline{BR} : \overline{DS} = \overline{BC} : \overline{DC} = \overline{DA} : \overline{DC} = \overline{DT} : \overline{DS}$, also $\overline{BR} = \overline{DT}$,

daher $\triangle QRB \cong \triangle TSD$, folglich $\overline{BQ} = \overline{DS}$ und somit

(8) $\overline{AQ} = \overline{CS}$.

Andererseits folgt

$\overline{AQ_1} : \overline{AT} = \overline{AB} : \overline{AD} = \overline{CD} : \overline{AD} = \overline{CS} : \overline{AT}$, also

(9) $\overline{AQ_1} = \overline{CS}$.

Aus (8) und (9) ergibt sich $Q = Q_1$, also fällt die Bahn der Kugel nach der Reflexion bei T (nämlich die Parallele durch Q_1 zu DB) mit der Parallelen durch Q zu DB zusammen, und somit verläuft sie durch P.

(Fall 2:) Liegt P auf der Diagonalen DB oder innerhalb des Dreiecks Δ BCD, so schneidet die Parallele durch P zu DB die Seite AB nicht in einem inneren Punkte. Daher kann die Aufgabe in diesem Falle keine Lösung haben.

3. Die vorgegebene Zahl enthält 6 Punkte
$9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 1 \cdot 3$ Ziffern, also insgesamt 192 Ziffern. Genau 92 davon sollen in der zu bildenden Zahl enthalten bleiben. Von zwei 92-stelligen Zahlen, die mit verschiedener Anzahl von Neunen beginnen, ist diejenige die größere, die mit der größeren Anzahl von Neunen beginnt.
Vor der ersten in der Zahl auftretenden Neun stehen 8 von Neun verschiedene Ziffern, vor der zweiten weitere 19, vor der dritten, vierten und fünften wiederum je weitere 19 von Neun verschiedene Ziffern. Streichen wir diese, so sind insgesamt 84 Ziffern ($8 + 4 \cdot 19 = 84$) entfernt. Es sind noch 16 Ziffern zu streichen.
Die Zahl beginnt dann so:
99999505152535455565758596O..................
Es ist nun nicht mehr möglich, die 19 Ziffern vor der nächsten (ursprünglich sechsten) Neun zu streichen, da dann mehr als 100 Ziffern entfielen.
Von zwei 92-stelligen Zahlen, die mit 5 Neunen beginnen und an der sechsten Stelle verschiedene Ziffern haben, ist diejenige größer, die an der sechsten Stelle die größere Zahl enthält. In unserem Fall kommt die Acht dafür nicht in Frage, da dann noch 17 Ziffern zu streichen wären. An der sechsten Stelle kann also höchstens eine Sieben stehen. Das ist auch erreichbar, wenn man die nächsten 15 Ziffern streicht. Entsprechend zeigt man, daß als letzte Ziffer die auf die Sieben folgende Fünf entfernt werden muß.
Die Zahl lautet also
999997859606162..................979899100.

Umlauf

L 9;II VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

4. Wegen $3 \cdot \frac{1}{4} < 1$ muß mindestens eine der Zahlen a, b, c kleiner als 4 sein. Wir betrachten zunächst die Fälle, in denen dies für die Zahl a zutrifft.

6 Punkte
Falls nicht alle Tripel angegeben werden, bis zu 2 Pkt. Abzug. Werden die Tripel durch Probieren gefunden, aber die Vollständigkeit der Lösung nicht nachgewiesen, dann 3 Pkt. Abzug.

<u>1. Fall:</u> a = 2 Es muß gelten

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1, \text{ also } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$$

Ähnlich wie eben zeigt man, daß mindestens eine der Zahlen b, c kleiner als 5 sein muß. Daraus folgt:

Für $\frac{1}{2}$ gibt es nur die folgenden beiden Zerlegungen in zwei Stammbrüche

(1) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ und

(2) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

<u>2. Fall:</u> a = 3 Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1, \text{ also}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}.$$

Mindestens eine der Zahlen b, c muß nun kleiner als 4 sein, und daraus folgt:

Für $\frac{2}{3}$ gibt es wieder nur zwei Zerlegungen in zwei Stammbrüche

(3) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ und

(4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Im Sinne der Aufgabe sind nun in den aus (1), (2), (3) und (4) resultierenden Zerlegungen der Zahl 1 noch alle verschiedenartigen Vertauschungen der Summanden zulässig, wobei jedoch die aus (2) und die aus (4) gewonnenen Zerlegungen miteinander übereinstimmen. Somit erhalten wir, daß genau folgende 10 Tripel die geforderten Bedingungen erfüllen:

(2,4,4), (4,2,4), (4,4,2)
(2,3,6), (2,6,3), (3,2,6), (3,6,2), (6,2,3), (6,3,2)
(3,3,3).

5. Das von C auf AB gefällte Lot habe die Länge h_c. 8 Punkte

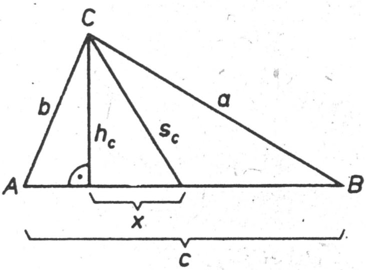
Dabei kann folgendes auftreten:

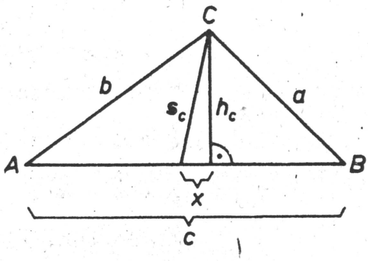
<u>1. Fall:</u> Das Lot fällt nicht mit der Seitenhalbierenden zusammen. Die Länge der Verbindungsstrecke vom Fußpunkt des Lotes zum Halbierungspunkt der Seite AB sei x.

1.1) Das Lot liegt innerhalb des Dreiecks ΔABC.

Das Lot liegt zwischen AC und Seitenhalbierender:

Das Lot liegt zwischen BC und Seitenhalbierender:





L 9,5a

Durch Anwendung des Satzes des Pythagoras ergibt sich:

$$h_c^2 = s_c^2 - x^2$$

und

$$b^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2} - x\right)^2$$
$$= s_c^2 - x^2 + \frac{c^2}{4} - cx + x^2$$

$$b^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2} + x\right)^2$$
$$= s_c^2 - x^2 + \frac{c^2}{4} + cx + x^2$$

also

$$b^2 = s_c{}^2 + \frac{c^2}{4} - cx \qquad\qquad b^2 = s_c{}^2 + \frac{c^2}{4} + cx$$

sowie

$$a^2 = h_c{}^2 + (\frac{c}{2} + x)^2 \qquad\qquad a^2 = h_c{}^2 + (\frac{c}{2} - x)^2$$

$$a^2 = s_c{}^2 + \frac{c^2}{4} + cx. \qquad\qquad a^2 = s_c{}^2 + \frac{c^2}{4} - cx.$$

Mithin erhält man:

$$b^2 + a^2 = 2s_c{}^2 + \frac{c^2}{2} \qquad\qquad b^2 + a^2 = 2s_c{}^2 + \frac{c^2}{2}$$

woraus in beiden Fällen

$$2s_c{}^2 = b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2},$$

also

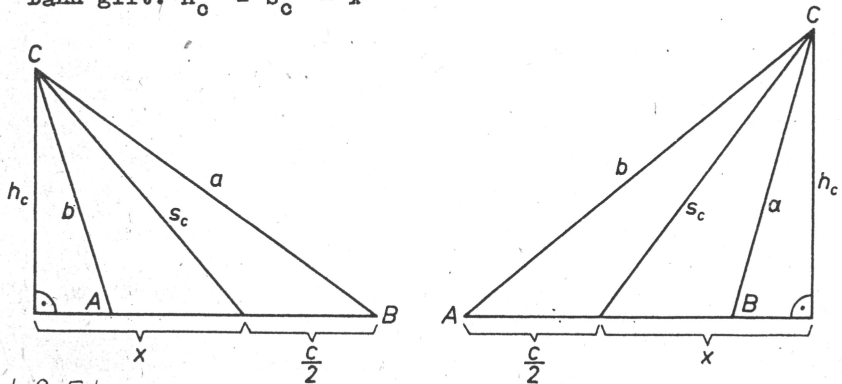
$$\underline{\underline{s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}}$$

folgt.

1.2 Das Lot liegt nicht innerhalb des Dreiecks

Die Seite AC fällt entweder mit dem Lot zusammen, oder sie liegt zwischen dem Lot und Seite BC.
(siehe Abb. L 9;5b)
Dann gilt: $h_c{}^2 = s_c{}^2 - x^2$

Die Seite BC fällt entweder mit dem Lot zusammen, oder sie liegt zwischen dem Lot und der Seite AC.



L 9;5b

$$b^2 = h_c{}^2 + (x - \frac{c}{2})^2 \qquad\qquad b^2 = h_c{}^2 + (x + \frac{c}{2})^2$$
$$= s_c{}^2 - cx + \frac{c^2}{4} \qquad\qquad = s_c{}^2 + cx + \frac{c^2}{4}$$

$$a^2 = h_c^2 + (x + \frac{c}{2})^2 = s_c^2 + cx + \frac{c^2}{4} \qquad a^2 = h_c^2 + (x - \frac{c}{2})^2 = s_c^2 - cx + \frac{c^2}{4}.$$

Daraus ergibt sich in beiden Fällen

$$a^2 + b^2 = 2\, s_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

also

$$\underline{\underline{s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}}$$

<u>2. Fall:</u> Das Lot fällt mit der Seitenhalbierenden zusammen. Dann ist $x = 0$ und $a = b$ und man erhält für $a \neq c$

$$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$$

bzw. für $a = b = c$

$$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Für alle Dreiecke gilt mithin

$$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

6. Angenommen, die reelle Zahl x erfülle die Ungleigleichung — 6 Punkte

$$(*)\ \frac{3}{2x - 1} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}.$$

Dann gilt $x \neq \frac{1}{2}$.

Wegen

$$\frac{3}{2x - 1} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} = \frac{9 - 12 + (2x - 1)}{3(2x - 1)} = \frac{2x - 4}{3(2x-1)} = \frac{x - 2}{3\,(x - \frac{1}{2})}$$

ist (*) genau dann erfüllt, wenn $\frac{x - 2}{3\,(x - \frac{1}{2})} > 0$ ist.

Dies gilt genau dann, wenn einer der beiden folgenden Fälle zutrifft:

(1) $x - 2 > 0$ und $x - \frac{1}{2} > 0$. Hierfür ist $x > 2$ notwendig und hinreichend.

(2) $x - 2 < 0$ und $x - \frac{1}{2} < 0$. Hierfür ist $x < \frac{1}{2}$ notwendig und hinreichend.

Daher sind genau diejenigen reellen Zahlen x Lösung von (*), die einem der beiden Intervalle $(-\infty, \frac{1}{2})$, $(2, +\infty)$ angehören.