VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Man ermittle die Anzahl aller Paare zweistelliger natürlicher Zahlen (m, n), für die
$$m + n = 111 \qquad \text{gilt!}$$

2. Für zwei rationale Zahlen a und b gelten die vier Ungleichungen $a + b \neq 3$; $a - b \neq 10$; $a \cdot b \neq 5$; $a : b \neq 18{,}75$. Die Zahlen 3; 10; 5 und 18,75 stimmen jedoch (in anderer Reihenfolge) mit je einer der Zahlen $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$ überein.
Ermitteln Sie die Zahlen a und b!

3. In einer alten Denksportaufgabe soll man einen Graben, der überall gleich breit ist und der einen rechtwinkligen Knick macht, mit Hilfe von zwei Bohlen überqueren, die genau so lang sind, wie der Graben breit ist. Die gesuchte Lösung ist (ohne Berücksichtigung der Breite der Bretter), die in Abb. A 9;3a gezeichnete.

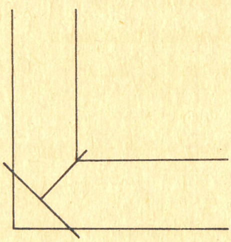

Abb. A9; 3a

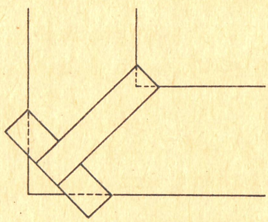

Abb. A9; 3b

a) Zeigen Sie durch eine Rechnung, daß diese Lösung richtig ist!

b) Die Breite des Grabens und die Länge der Bohlen sei a, die Breite der Bohlen sei b. Welchen Wert hat das Verhältnis b : a, wenn die Bretter die in Abb. A 9;3b gezeigte Lage haben? (Ein Durchbiegen der Bohlen und eine bedingte Tragfähigkeit des Grabenrandes sollen nicht berücksichtigt werden.)

4. Einem regelmäßigen Oktaeder ist eine Kugel umbeschrieben. Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächeninhalte beider Figuren!

L 9 VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Die gesuchten Paare lassen sich in 2 Gruppen aufteilen: 7 Punkte

1. Gruppe: Die Summe der Einer der beiden zweistelligen Zahlen beträgt 1, die Summe ihrer Zehner beträgt 11. Bezeichnet man die Ziffern der Zahlen eines Paares, das dieser Bedingung entspricht, der Reihe nach mit (a; b), (c; d), dann erfüllen auch die Paare (a; d), (c; b); (c; b), (a; d) und (c;d), (a; b) die gleiche Bedingung. Wegen $0 + 1 = 1$ und $9 + 2 = 11$; $8 + 3 = 11$; $7 + 4 = 11$; $6 + 5 = 11$ gibt es genau 16 derartige Paare.

2. Gruppe: Die Summe der Einer beträgt 11, die der Zehner 10. Das ergibt wegen $9 + 1 = 10$; $8 + 2 = 10$; $7 + 3 = 10$; $6 + 4 = 10$ und $5 + 5 = 10$ aus dem oben genannten Grunde genau 72 derartige Paare.

Insgesamt erhält man mithin genau 88 Zahlenpaare, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

2. Wegen $(a \cdot b) \cdot (a : b) = a^2$ muß das Produkt zweier der Zahlen 3; 10; 5; 18,75 das Quadrat einer rationalen Zahl sein. Aus $18{,}75 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2}$ folgt, daß unter den gegebenen Zahlen $3 \cdot 18{,}75$ diese Bedingung erfüllt. Alle anderen Produkte ergeben keine Quadrate rationaler Zahlen. 11 Punkte

Daher gibt es höchstens die folgenden Möglichkeiten:

(I) $ab = 18{,}75$; $a : b = 3$.

Hieraus folgt $a^2 = (ab) \cdot (a:b) = 56{,}25$, also entweder

(A) $a = 7,5$; $b = \frac{18,75}{a} = 2,5$, und alle Bedingungen der Aufgabe sind erfüllt, oder

(B) $a = -7,5$; $b = -2,5$. Dieser Fall scheidet aus, da z.B. $a + b = -10$ mit keiner der Zahlen 3; 10; 5; 18,75 übereinstimmt.

(II) $ab = 3$; $a : b = 18,75$.

Hieraus folgt $a^2 = 56,25$, also entweder

(A) $a = 7,5$; $b = \frac{3}{a} = 0,4$ (Wegen $a + b = 7,9$ scheidet dieser Fall aus.) oder

(B) $a = -7,5$; $b = -0,4$ (Wegen $a + b = -7,9$ scheidet dieser Fall aus.).

Also genügen $a = 7,5$ und $b = 2,5$ und nur diese den angegebenen Bedingungen.

3. Zu a) Die Entfernung $\overline{DG} = d$ der beiden Grabenecken beträgt als Diagonale in einem Quadrat, dessen Seitenlänge a ist, $d = a\sqrt{2}$. Die maximal durch die beiden Bretter überbrückbare Strecke in Richtung der Diagonalen hat die Länge $\frac{a}{2} + a$. Wegen $\frac{3}{2}a > \sqrt{2}\,a$ $(1,5\,a > 1,415\,a)$ ist die Lösung richtig. 5 Punkte

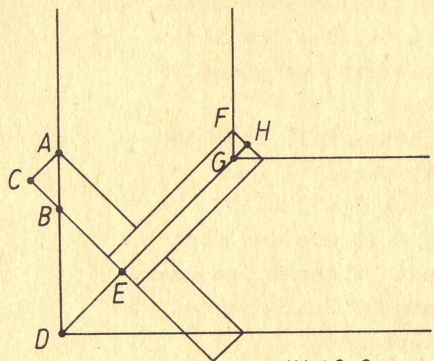

Abb. L9; 3

Zu b) Aus den gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken $\triangle ABC$, $\triangle BDE$ und $\triangle FGH$ erhält man 6 Punkte

zus. 11 Punkte

$$\overline{CA} = \overline{CB} = b,$$

$$\overline{DE} = \overline{BE} = \frac{a}{2} - b,$$

$$\overline{GH} = \overline{FH} = \frac{b}{2}, \text{ also } \overline{EG} = a - \frac{b}{2},$$

$$a\sqrt{2} = \overline{DG} = \frac{a}{2} - b + a - \frac{b}{2},$$

$$\frac{3}{2}b = a\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$$

somit

$$b : a = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

L 9

4. Es seien O_O und O_K die Oberflächeninhalte des Oktaeders bzw. der Kugel, a die Kantenlänge des Oktaeders und r die Länge des Radius der Kugel.

Dann gilt

$r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ (als halbe Diagonale des Quadrates ABCD) 2 Punkte

$O_K = 4\pi r^2 = 4\pi \frac{a^2}{2} = 2\pi a^2$ 3 Punkte

$O_O = 8 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}.$ 4 Punkte

Also gilt:

$O_K : O_O = 2\pi a^2 : 2a^2 \sqrt{3} = \pi : \sqrt{3}$ 2 Punkte

zus. 11 Punkte