Bezirksolympiade

1. Konstruiere das Dreieck $\triangle ABC$ aus $\overline{AB} = 5$ cm, dem Winkel $\sphericalangle BAC$ mit der Größe $\alpha = 70^\circ$ und der Bedingung, daß der Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks die Höhe durch den Eckpunkt B halbiert!

2. Unter der Quersumme einer natürlichen Zahl versteht man die Summe ihrer Ziffern: Z. B. hat 1967 die Quersumme $1 + 9 + 6 + 7 = 23$.

Man ermittle die Summe aller Quersummen der natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich 1000!

3. Es seien a und b positive ganze Zahlen.

Gesucht sind alle ganzen Zahlen x, für die $\frac{a + x}{b - x} = \frac{b}{a}$ ist.

4. Es sei a eine positive ganze Zahl.

Zeige, daß der Bruch $\frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a - 1}$ weder durch 2 noch durch 3 gekürzt werden kann!

5. Beweise: Zwei Eckpunkte eines beliebigen Dreiecks $\triangle ABC$ sowie die Fußpunkte der durch diese Ecken gehenden Höhen bestimmen ein Sehnenviereck, d. h. ein Viereck, dessen Eckpunkte auf demselben Kreis liegen, dessen Seiten also Sehnen dieses Kreises sind.

6. Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:

1) Die Differenz ihrer Ziffern beträgt drei.

2) Vertauscht man ihre Ziffern, so ist die neue Zahl um neun kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.

A 8;II VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

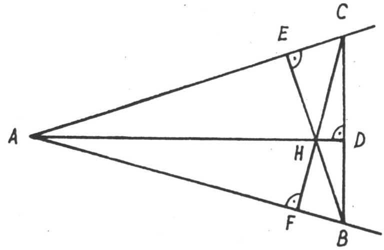
Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

4. Es sei a eine positive ganze Zahl.
Zeige, daß der Bruch $\frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a - 1}$ weder durch 2 noch durch 3 gekürzt werden kann!

5. Beweise: Zwei Eckpunkte eines beliebigen Dreiecks ΔABC, sowie die Fußpunkte der durch diese Ecken gehenden Höhen bestimmen ein Sehnenviereck, d.h. ein Viereck, dessen Eckpunkte auf demselben Kreis liegen, dessen Seiten also Sehnen dieses Kreises sind.

6. Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:
   1) Die Differenz ihrer Ziffern beträgt drei.
   2) Vertauscht man ihre Ziffern, so ist die neue Zahl um neun kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.

Bezirksolympiade



1. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei das verlangte Dreieck, die Punkte D, E und F seien die Fußpunkte der Höhen durch A, B bzw. C; H sei der Höhenschnittpunkt. Dann ist $\triangle ABE$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB, dem rechten Winkel $\sphericalangle AEB$ und dem Winkel $\sphericalangle BAE \cong \sphericalangle BAC$.
Die Höhe durch C geht durch den Mittelpunkt H der Seite EB und steht senkrecht auf AB.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen kann, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man konstruiert zunächst das Teildreieck $\triangle ABE$, halbiert die Seite EB (Halbierungspunkt sei H) und fällt von H auf AB das Lot. Sein Fußpunkt sei F. Die Verlängerung dieses Lotes über H hinaus schneidet die Verlängerung der Seite AE über E hinaus im Punkt C. $\triangle ABC$ ist das verlangte Dreieck.

(III) Der Beweis, daß ein so konstruiertes Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe genügt (also die Umkehrung von (I)), ergibt sich leicht aus (II); die eindeutige Lösbarkeit der Aufgabe aus (I).

2. Wir nehmen 0 (mit der Quersumme 0) unter die zu berücksichtigenden Zahlen auf, schließen 1000 vorläufig aus und fassen jeweils die beiden Zahlen a und 999 - a ($0 \leqq a \leqq 499$) zu einem Paar zusammen. Es sei $a = \alpha \cdot 10^2 + \beta \cdot 10 + \gamma$ (*) mit ganzen Zahlen α, β, γ, für die $0 \leqq \alpha,\beta,\gamma \leqq 9$ gilt. Dann ist die Quersumme von a gleich $\alpha + \beta + \gamma$.
Ferner ist

$$\begin{aligned} 999 - a &= 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9 - \alpha \cdot 10^2 - \beta \cdot 10 - \gamma \\ &= (9 - \alpha) \cdot 10^2 + (9 - \beta) \cdot 10 + (9 - \gamma), \end{aligned}$$

und wegen (*) gilt auch $0 \leq 9 - \alpha, 9 - \beta, 9 - \gamma \leq 9$ und $9 - \alpha$, $9 - \beta$, $9 - \gamma$ sind ganz.

Daher ist die Quersumme dieser Zahl $(9 - \alpha) + (9 - \beta) + (9 - \gamma)$ und die Summe beider Quersummen dann

$(9 - \alpha) + (9 - \beta) + (9 - \gamma) + \alpha + \beta + \gamma = 27.$

Es gibt genau 500 solcher Paare, also ist die Summe der Quersummen der hiermit erfaßten Zahlen $500 \cdot 27 = 13\,500$. Dazu ist noch die Quersumme 1 von 1000 zu addieren.

Die gesuchte Summe beträgt mithin 13 501.

3. (I) Angenommen, x sei eine Zahl mit der genannten Eigenschaft,

dann gilt $\quad \frac{a + x}{b - x} = \frac{b}{a}$;

hieraus folgt $\quad a^2 + ax = b^2 - bx$,

also $\quad (a + b)x = b^2 - a^2$.

Da a und b positiv sind, ist $a + b \neq 0$, und es folgt weiter

$$x = \frac{b^2 - a^2}{a + b} = b - a.$$

Somit kann höchstens die Zahl $x = b - a$ die genannte Eigenschaft haben.

(II) Durch Umkehrung dieser Schlüsse folgt, daß sie tatsächlich diese Eigenschaft besitzt.

Aus $x = b - a$ folgt $(a + b)x = b^2 - a^2$, hieraus $a(a + x) = b(b-x)$. Da ferner $a \neq 0$ gilt und mithin auch $b - x$ $(=a) \neq 0$ ausfällt, ergibt sich weiter $\frac{a + x}{b - x} = \frac{b}{a}$, w.z.b.w.

4. (I) Ist a gerade, so ist a^2 gerade, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ ungerade. Ist a ungerade, so ist a^2 ungerade, also $a^2 - a$ gerade und folglich $a^2 - a + 1$ ungerade. Daher ist der Zähler stets ungerade, also kann der Bruch nicht durch 2 gekürzt werden. (Entsprechend könnte man den Beweis auch durch alleinige Untersuchung des Nenners führen.)

(II) Ist a durch 3 teilbar, so auch a^2, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ nicht durch 3 teilbar. (Ähnlich folgt: auch $a^2 + a - 1$ nicht.) Läßt a bei Division durch 3 den Rest 1, so auch a^2; folglich ist dann $a^2 - a$ durch 3 teilbar, also $a^2 - a + 1$ nicht. (Ähnlich: auch $a^2 + a - 1$ nicht.)

Läßt a bei Division durch 3 den Rest 2, so läßt a^2 bei Division durch 3 den Rest 1; folglich ist dann $a^2 + a$ durch 3 teilbar, also $a^2 + a - 1$ nicht.

Daher ist von den beiden Zahlen $a^2 - a + 1$, $a^2 + a - 1$ stets (mindestens) eine nicht durch 3 teilbar, somit kann der Bruch nicht durch 3 gekürzt werden.

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 – 2. Tag –

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

4. 1. Lösungsweg: 6 Punkte

(I) Ist a gerade, so ist a^2 gerade, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ ungerade. Ist a ungerade, so ist a^2 ungerade, also $a^2 - a$ gerade und folglich $a^2 - a + 1$ ungerade. Daher ist der Zähler stets ungerade, also kann der Bruch nicht durch 2 gekürzt werden. (Entsprechend könnte man den Beweis auch durch alleinige Untersuchung des Nenners führen.)

(II) Ist a durch 3 teilbar, so auch a^2, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ nicht durch 3 teilbar. (Ähnlich folgt: auch $a^2 + a - 1$ nicht.) Läßt a bei Division durch 3 den Rest 1, so auch a^2; folglich ist dann $a^2 - a$ durch 3 teilbar, also $a^2 - a + 1$ nicht. (Ähnlich: auch $a^2 + a - 1$ nicht.)
Läßt a bei Division durch 3 den Rest 2, so läßt a^2 bei Division durch 3 den Rest 1; folglich ist dann $a^2 + a$ durch 3 teilbar, also $a^2 + a - 1$ nicht.
Daher ist von den beiden Zahlen $a^2 - a + 1$, $a^2 + a - 1$ stets (mindestens) eine nicht durch 3 teilbar, somit kann der Bruch nicht durch 3 gekürzt werden.

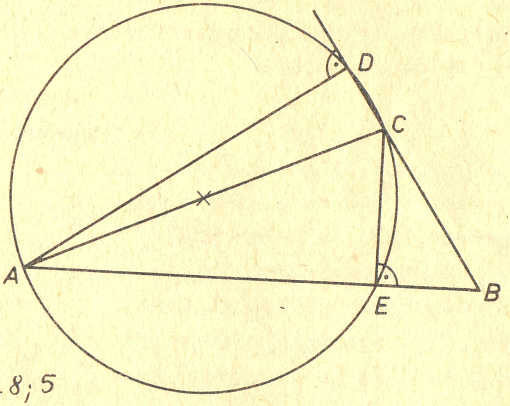
2. Lösungsweg:

(I) Von den beiden Zahlen a - 1, a ist stets eine gerade. Daher ist $a^2 - a = (a - 1)\,a$ stets gerade usw. wie 1. Lösungsweg.

(II) Von den drei Zahlen a - 1, a, a + 1 ist stets eine durch 3 teilbar, also auch stets (mindestens) eine der beiden Zahlen $a^2 - a = (a - 1)\,a$ und $a^2 + a = a\,(a + 1)$.
Folglich ist von den beiden Zahlen

$a^2 - a + 1$ und $a^2 + a - 1$ stets (mindestens) eine nicht durch 3 teilbar usw.

5. In dem Dreieck $\triangle$ ABC seien (O.B.d.A.) A und C die in der Aufgabe genannten Eckpunkte und D und E die zugehörigen Höhenfußpunkte (siehe Abb. L 8;5). Da A, E, C nicht auf derselben Geraden liegen, gibt es genau einen Kreis durch diese drei Punkte. 8 Punkte



L 8;5

Nach der Umkehrung des Satzes des Thales ist wegen des rechten Winkels bei E die Seite AC ein Durchmesser des Kreises, und es liegen auf diesem Kreis die Eckpunkte aller rechtwinkligen Dreiecke, die AC zur Hypotenuse haben, mithin auch der Punkt D. Folglich ist das Viereck AECD ein Sehnenviereck.

6. (I) Da die Zahl zweistellig sein soll, muß sie größer als 9 sein. Daraus folgt, daß ihr um 9 vermindertes Doppeltes größer sein muß als sie selbst. Wegen der 2. Bedingung besagt dies, daß bei Umstellung der Ziffern aus der Zahl eine größere Zahl entstehen soll. Daher muß ihre erste Ziffer kleiner sein als ihre zweite. 5 Punkte

(II) Ferner soll das um 9 verminderte Doppelte wieder zweistellig, also höchstens 99 sein.
Daraus ergibt sich, daß die Zahl höchstens 54 betragen kann.
Wegen der 1. Bedingung verbleiben hiernach noch genau die folgenden Möglichkeiten: 14, 25, 36 und 47.
Von diesen erfüllt nur die Zahl 36 alle Bedingungen der Aufgabe.