A 8

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Errichtet man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks die Quadrate nach außen, so bilden die äußeren Eckpunkte der Quadrate die Ecken eines konvexen Sechsecks.
   Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecks mit A_3; den jedes der Quadrate mit A_4 und den des Sechsecks mit A_6. Gesucht sind ganze Zahlen n und m so, daß die Gleichung $A_6 = nA_3 + mA_4$ gilt.

2. Gegeben sind ein Kreis k (Mittelpunkt M, Radius der Länge $r = 6$ cm) und ein Kreis k_1 (Mittelpunkt M_1, Radius der Länge $r_1 = 2$ cm). Beide Kreise berühren einander von außen.
   Konstruiere alle Kreise mit dem Radius der Länge 2 cm, die die beiden gegebenen Kreise berühren!
   Konstruiere auch die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit den gegebenen!

3. Jemand würfelte mit n Würfeln bei einem einzigen Wurfe zusammen die Augenzahl $3n + 4$, und zwar zeigte dabei jeder Würfel die gleiche Augenzahl.
   Man ermittle sämtliche Werte von n, für die das möglich ist!

4. Beweise den Satz: Unter n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ($n \geqq 2$) gibt es stets eine, die durch n teilbar ist.

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Das Sechseck setzt sich zusammen aus: 12 Punkte

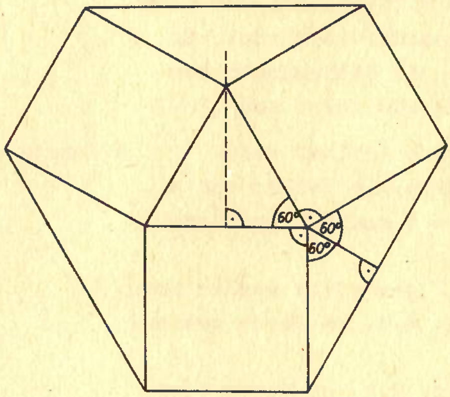

Abb. L 8 ; 1

einem gleichseitigen Dreieck (Flächeninhalt A_3), 3 Quadraten (Flächeninhaltssumme $3\ A_4$) und 3 stumpfwinkligen Dreiecken, deren Flächeninhaltssumme sich folgendermaßen berechnen läßt: Fällt man in diesen Dreiecken die Lote (Höhen) auf die Sechseckseite, so entstehen rechtwinklige Dreiecke, und diese sind kongruent zu denjenigen Dreiecken, die durch Konstruktion einer Höhe des gleichseitigen Dreiecks entstehen (s.w.w.; der rechte Winkel liegt der größten Seite gegenüber). Die Flächeninhaltssumme der 3 stumpfwinkligen Dreiecke beträgt daher $3\ A_3$.
Folglich ist $A_6 = \underline{4\ A_3 + 3\ A_4}$.

Damit sind ganze Zahlen n = 4 und m = 3 so, wie in der Aufgabe gefordert war, angegeben.

2. (I) Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen entweder (1) auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r + r_1$ oder (1') auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r - r_1$, da sie k berühren sollen, und (2) auf dem Kreis um M_1 mit 12 Punkte

dem Radius der Länge $r_1 + r_1$, da sie k_1 berühren sollen und denselben Radius haben wie k_1.*

(II) Daher ergeben sich die Mittelpunkte der gesuchten Kreise als Schnittpunkte der Kreise nach (1) und (2) (das sind 2 Schnittpunkte) und als Berührungspunkt der Kreise nach (1') und (2). Dieser Punkt liegt auf der Verbindungsgeraden durch M und M_1. Die Berührungspunkte der Kreise erhält man, wenn man die Mittelpunkte der sich berührenden Kreise miteinander verbindet. Es gibt genau 3 Kreise, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. (Der Beweis folgt aus (I).)

3. Die Augenzahl $3n + 4$ muß durch n teilbar sein. 8 Punkte
$\frac{3n + 4}{n} = 3 + \frac{4}{n}$ liefert nur für n als Teiler von 4, also nur für $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$ ganzzahlige Ergebnisse.
$n = 1$ scheidet aus, da keine 7 gewürfelt werden kann.
Für $n = 2$ erhält man 10 Augen, d.h. es wurde zweimal eine 5 gewürfelt.
Für $n = 4$ ergeben sich ~~4~~ 16 Augen, d.h. es wurde viermal eine ~~1~~ 4 gewürfelt.
Es wurde also entweder mit 2 oder mit 4 Würfeln gewürfelt.

4. Wir bezeichnen die größte der n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit g. Sie lasse bei der Division durch n den Rest r mit $0 \leqq r \leqq n - 1$, es gelte also $g = q \cdot n + r$ (q ganzzahlig). 8 Punkte
Daher gehört die durch n teilbare Zahl $g - r$ zu den n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

* Anmerkung: Falls ein Schüler auch zwei zusammenfallende Kreise als einander berührend bezeichnet und hierdurch zu dem Ergebnis kommt, auch k_1 als vierte Lösung anzugeben, so kann eine solche Angabe (bei sonst richtiger Formulierung) als richtig gewertet werden, da die Aufgabenstellung diese Deutung nicht ausdrücklich ausschließt.