A 7;I VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Die Seiten eines Sechsecks, bei dem keine Seite zu einer anderen parallel verläuft, werden über die Eckpunkte hinaus verlängert.
Wieviel neue Schnittpunkte können dabei höchstens entstehen?

2. Beweise folgende Behauptung:
Halbiert man die beiden der Seite BC anliegenden Außenwinkel des Dreiecks $\triangle$ ABC und fällt vom Schnittpunkt M der Halbierenden auf die Seiten des Dreiecks oder ihre Verlängerungen die Lote MD, ME und MF, so gilt $\overline{MD} = \overline{ME} = \overline{MF}$.

3. Drei Angler fuhren zum Fischfang. Der erste fing 3 Fische, der zweite 4 und der dritte keinen. Die Fischer brieten alle 7 Fische, verteilten sie gleichmäßig unter sich und frühstückten. Zum Spaß gab der dritte Fischer seinen beiden Kameraden 7 Pfennige, um die von ihm verzehrten Fische zu "bezahlen".
Wie müßten die 7 Pfennige unter diesen Umständen verteilt werden?

A 7;II VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

4. Gegeben sei die Gleichung $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 = x - \frac{3}{4}$.
In dieser Gleichung soll der Summand 7 so durch eine andere Zahl ersetzt werden, daß $x = 11$ die Gleichung erfüllt.
Wie lautet diese Zahl?

5. Gegeben seien zwei natürliche Zahlen n und m, die bei Division durch 5 beide den Rest 3 lassen.
Beweise, daß das Produkt der beiden Zahlen bei Division durch 5 den Rest 4 läßt!

6. Auf den Verlängerungen der Seiten AB, BC und CA des Dreiecks $\triangle ABC$ werden über die Punkte B bzw. C bzw. A hinaus Strecken mit den Längen $\overline{BB'} = \overline{AB}$, $\overline{CC'} = \overline{BC}$ und $\overline{AA'} = \overline{CA}$ abgetragen.
Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ siebenmal so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$!

L 7;I VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

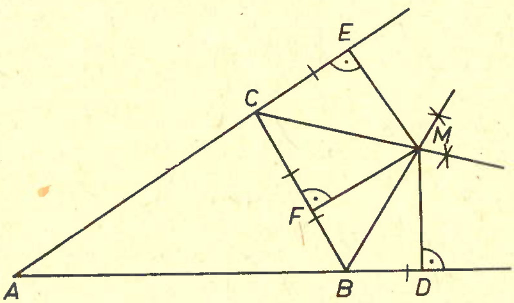
Olympiadeklasse 7 – 1. Tag –

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1. Die Lösung läuft auf die Frage hinaus: — 6 Punkte

"Wieviel Schnittpunkte können 6 Geraden maximal haben, wenn keine von ihnen zu einer anderen parallel verläuft?" Dabei ist am Schluß die Anzahl der Eckpunkte des Sechsecks zu subtrahieren.
Jede Gerade kann mit den übrigen 5 Geraden höchstens 5 Schnittpunkte haben. Bei 6 Geraden erhält man also höchstens $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Schnittpunkte, da zu jedem Schnittpunkt in diesem Falle genau 2 Geraden gehören.
Da die Ecken des Sechsecks 6 dieser Schnittpunkte darstellen, können also höchstens 9 neue Schnittpunkte entstehen.

2. Die Dreiecke $\triangle$ CFM und $\triangle$ CME sind kongruent; denn sie stimmen in der Seite CM und in 2 Winkeln laut Konstruktion überein. Daher gilt $\overline{ME} = \overline{MF}$. Ebenso sind die Dreiecke $\triangle$ MFB und $\triangle$ MDB kongruent, woraus $\overline{MF} = \overline{MD}$ folgt. Mithin gilt $\overline{MD} = \overline{ME} = \overline{MF}$. — 7 Punkte



L 7;2

3. Jeder Angler aß $\frac{7}{3}$ Fische. — 6 Punkte

Daher gab der erste $\frac{2}{3}$ Fische, der zweite $\frac{5}{3}$ Fische an den dritten. Falls die vom dritten Angler verzehrten Fische also "bezahlt" werden sollen, müßte der erste 2 und der zweite 5 Pfennige bekommen.

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

4. (I) Angenommen, a sei eine Zahl, wie sie in der Aufgabenstellung gesucht ist. Dann erfüllt $x = 11$ die Gleichung $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = x - \frac{3}{4}$, das heißt: Dann gilt die Gleichung $\frac{11}{2} + \frac{11}{3} + a = 11 - \frac{3}{4}$. Hieraus folgt $a = 11 - \frac{3}{4} - \frac{11}{2} - \frac{11}{3} = \frac{13}{12}$. Also hat höchstens die Zahl $a = \frac{13}{12}$ die verlangte Eigenschaft. — 7 Punkte

(II) Ist $x = 11$ und $a = \frac{13}{12}$, so ist

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = \frac{11}{2} + \frac{11}{3} + \frac{13}{12} = \frac{123}{12} = \frac{41}{4}$$

und

$$x - \frac{3}{4} = 11 - \frac{3}{4} = \frac{41}{4},$$

so daß im Fall $a = \frac{13}{12}$ die Zahl $x = 11$ der Gleichung (1) genügt.

5. Nach Voraussetzung haben die beiden gegebenen Zahlen n, m die Form $n = 5n' + 3$ und $m = 5m' + 3$ (n', m' ganz). — 7 Punkte
Daher gilt:

$$n \cdot m = (5n' + 3)(5m' + 3) = 25n'm' + 15n' + 15m' + 9 = 5\,[5n'm' + 3(n' + m') + 1] + 4,$$

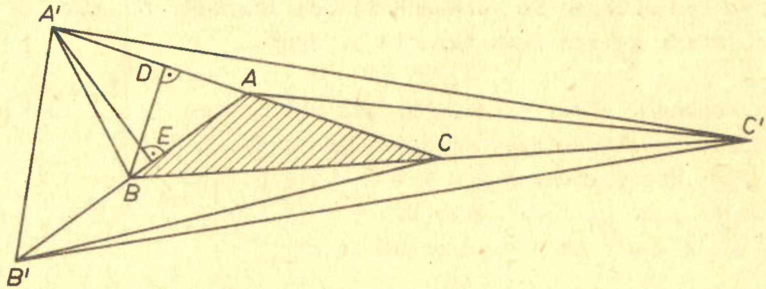
d.h. $n \cdot m$ läßt bei Division durch 5 den Rest 4.

6. Zum Beweise verwendet man den Satz, daß Dreiecke flächengleich sind, wenn sie in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen. — 7 Punkte

L 7;II

Behauptung:

Es ist I (Δ A'B'C') = 7 . I (Δ ABC), wenn I (Δ A'B'C') den Flächeninhalt des Dreiecks Δ A'B'C' und I (Δ ABC) den des Dreiecks Δ ABC bezeichnet.



L 7;6

Beweis:

(vgl. Abb. L 7;6) Es seien D der Fußpunkt des Lotes von B auf A'C (bzw. die Verlängerung dieser Strecke) und E der Fußpunkt des Lotes von A' auf AB' (bzw. die Verlängerung).

Dann gilt:

Δ ABC ist flächengleich Δ AA'B; denn es gilt $\overline{AC} = \overline{AA'}$ und $\overline{BD} = \overline{BD}$ (als gemeinsame Höhe).

Δ BAA' ist flächengleich Δ B'BA'; denn BA' ist Seitenhalbierende im Dreieck Δ B'AA' und es gilt: $\overline{BA} = \overline{B'B}$ sowie $\overline{A'E} = \overline{A'E}$.

Daraus folgt, daß Δ B'BA' auch flächengleich Δ ABC ist.

Entsprechend beweist man, daß die Dreiecke Δ A'AC', Δ ACC', Δ C'CB' und Δ CBB' alle flächengleich dem Dreieck Δ ABC sind.

Das Dreieck Δ ABC liegt ganz im Innern des Dreiecks Δ A'B'C' (die Winkel $\sphericalangle$ A'CC', $\sphericalangle$ B'BC' und $\sphericalangle$ B'AA' sind als Außenwinkel des Dreiecks Δ ABC sämtlich kleiner 180°).

Daher erhält man den Flächeninhalt des Dreiecks Δ A'B'C', indem man die Flächeninhalte der sieben zu Δ ABC flächengleichen Dreiecke Δ ABC, Δ AA'B, Δ B'BA', Δ A'AC', Δ ACC', Δ C'CB' und Δ CBB' addiert.

Mithin gilt:

I (Δ A'B'C') = 7 . I (Δ ABC).