VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 7

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C ist ein Quadrat so einzubeschreiben, daß der rechte Winkel des Dreiecks zum Quadratwinkel wird und der ihm gegenüberliegende Eckpunkt des Quadrates auf der Hypotenuse AB des Dreiecks liegt.

2. Horst sagte zu Klaus: Nenne mir eine dreistellige natürliche Zahl, von deren Ziffern keine Null ist und keine zwei einander gleich sind! Notiere sie und schreibe darunter sämtliche dreistelligen Zahlen, die durch Umstellen der Ziffern der genannten Zahl entstehen können! Addiere alle diese Zahlen!
Ehe Klaus fertig war, hatte Horst schon längst das Ergebnis im Kopf gefunden. Er rechnete: $2\,Q \cdot 111$, wobei Q die Quersumme der erstgenannten Zahl bedeutet.
Begründe sein Verfahren allgemein und gib dann ein Zahlenbeispiel!

3. Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. M sei der Mittelpunkt der Seite AC. Die Parallele zu der Seite AB durch den Punkt M schneide die Seite BC im Punkte N.
Beweise, daß N der Mittelpunkt der Seite BC ist!

4. Auf einer Exkursion fuhren mit Autobussen genau 319 Schüler, auf einer anderen Exkursion genau 232.
In jedem der Autobusse, die auf beiden Exkursionen fuhren, saß genau die gleiche Anzahl Schüler.
Ermittle diese Anzahl!
(Wir setzen dabei voraus, daß in jedem Autobus mehr als 1 Schüler saß.)

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Jede Diagonale eines Quadrats halbiert zwei gegenüberliegende Winkel des Quadrats. Deshalb konstruiert man die Winkelhalbierende des rechten Winkels $\sphericalangle$ ACB. Sie schneidet die Seite AB im Punkt D. Dann ist die Strecke CD eine Diagonale des gesuchten Quadrats. Die Parallelen durch D zu AC und CB schneiden CB in E und AC in F. DECF ist das gesuchte Quadrat. — 8 Punkte

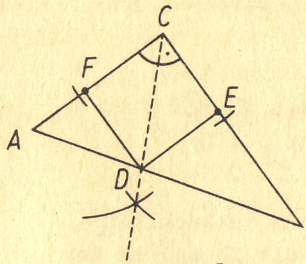

Abb. L 7; 1

2. a, b, c seien natürliche Zahlen, die alle größer Null und kleiner oder gleich 9 sind. Dann heißen die dreistellige Zahl und die sich durch Umstellung ihrer Ziffern ergebenden Zahlen: — 11 Punkte

$100\,a + 10\,b + c$
$100\,a + 10\,c + b$
$100\,b + 10\,a + c$
$100\,b + 10\,c + a$
$100\,c + 10\,a + b$
$100\,c + 10\,b + a$

Die Summe s ist dann:

$s = 100\,(2a + 2b + 2c) + 10\,(2a + 2b + 2c) + (2a + 2b + 2c).$

Da $2a + 2b + 2c = 2Q$ ist, erhält man

$s = 100 \cdot 2Q + 10 \cdot 2Q + 1 \cdot 2Q$

$s = 2Q\,(100 + 10 + 1)$

$s = 2Q \cdot 111$

<u>**Beispiel:**</u>

$$\begin{array}{r} 534 \\ 543 \\ 354 \\ 345 \\ 453 \\ \underline{435} \\ 2664 \end{array}$$

$2\ Q = 24$

$24 \cdot 111 = 2664$

3. Die Parallele p zu BC durch M schneide AB in P. 11 Punkte

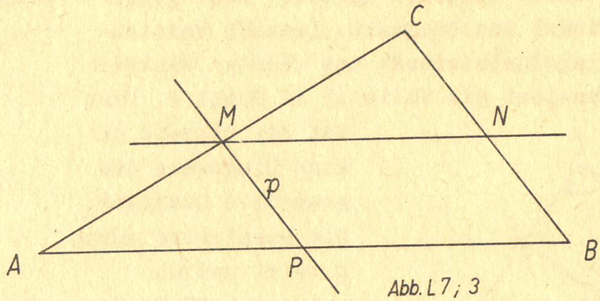

Abb. L 7; 3

Daß diese Parallele p die Strecke AB tatsächlich schneidet, folgt so: Durch p wird die Ebene, in der $\triangle$ ABC liegt, in zwei Halbebenen zerlegt, in deren einer die Gerade durch B und C verläuft und in deren anderer A liegt, weil sonst AC nicht von p geschnitten würde. Daher schneidet p auch die Strecke AB.

Dann gilt:

(1) $\sphericalangle$ ABC $\cong$ $\sphericalangle$ MNC $\cong$ $\sphericalangle$ APM als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen
$\sphericalangle$ CAB $\cong$ $\sphericalangle$ CMN

(2) $\triangle$ APM $\cong$ $\triangle$ MNC nach dem Kongruenzsatz sww
Daraus folgt: $\overline{MP} = \overline{CN}$

(3) Viereck BNMP ist ein Parallelogramm (nach Konstruktion).

Aus (2) und (3) folgt die Behauptung.

4. Die Anzahl der Schüler pro Autobus muß ein gemeinsamer Teiler > 1 von 319 und 232 sein. 10 Punkte

Wegen $319 = 11 \cdot 29$
und $232 = 8 \cdot 29$
ist die Primzahl 29 der einzige gemeinsame Teiler > 1 von 319 und 232; denn 11 und 8 sind teilerfremd.

Daher fuhren in jedem Bus genau 29 Schüler.