A 6 VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 6

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1. Die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 schneiden einander in der aus der Abb. A 6;1 ersichtlichen Weise. Von den Größen α, β, γ und δ der dadurch entstehenden Winkel sei
$\alpha = 50^\circ$ $\beta = 130^\circ$ $\gamma = 70^\circ$
Ermittle δ !

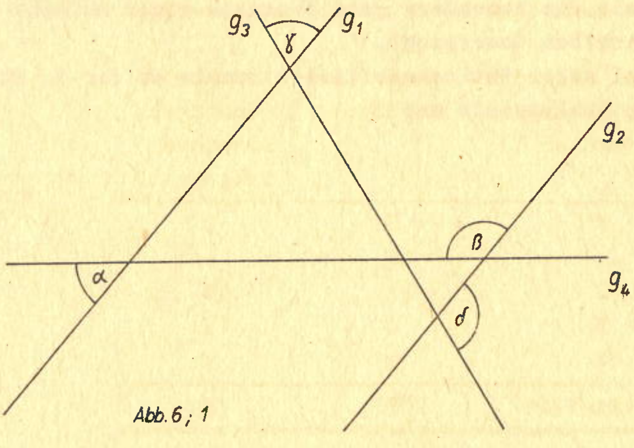

Abb. 6 ; 1

2. Jedes der beiden Vorderräder eines Wagens hat einen Umfang von 210 cm, jedes der beiden Hinterräder einen Umfang von 330 cm. Ermittle die kürzeste Strecke (in m), die der Wagen auf einer ebenen geraden Straße durchfahren haben muß, damit jedes seiner Räder genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat!

3. Nach einem Scheibenschießen verglichen Elke, Regina, Gerd und Joachim ihre Schußleistungen. Es ergab sich folgendes:
   (1) Joachim erzielte mehr Ringe als Gerd.
   (2) Elke und Regina erreichten gemeinsam dieselbe Ringzahl wie Joachim und Gerd zusammen.
   (3) Elke und Joachim erzielten zusammen weniger Ringe als Regina und Gerd.

   Ermittle auf Grund dieser Angaben die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl!

4. Von den Teilnehmern einer Schule eines Landkreises an der 1. Stufe der Mathematikolympiade wurden genau $\frac{3}{40}$ zur 2. Stufe delegiert. Von diesen Schülern erhielten bei der 2. Stufe (Kreisolympiade) genau $\frac{2}{9}$ Preise oder Anerkennungsschreiben.

   Einen ersten Preis in seiner Klassenstufe erhielt genau ein Schüler, genau ein weiterer Schüler erhielt in seiner Klassenstufe einen zweiten Preis, genau zwei weitere bekamen dritte Preise. Außerdem wurden genau vier anderen Schülern dieser Schule für besonders gute Lösungen einer Aufgabe Anerkennungsschreiben überreicht.
   Gib die Zahl aller Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe der Mathematikolympiade an!

L 6 VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 6

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Es gilt mit den in der Abb. L 6;1 gewählten Bezeichnungen — 10 Punkte

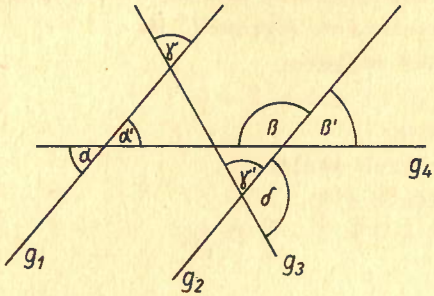

Abb. L 6;1

$\alpha = \alpha'$ (als Scheitelwinkelpaar)

$\beta + \beta' = 180^\circ$ (als Nebenwinkelpaar)

mithin

$\beta' = 180^\circ - \beta$

$\beta' = 180^\circ - 130^\circ$

$\beta' = 50^\circ$

also

$\beta' = \alpha$.

Daraus folgt: $g_1 \parallel g_2$.

Nun ist ferner:

$\gamma = \gamma'$ (als Stufenwinkelpaar an geschnittenen Parallelen)

und $\gamma' + \delta = 180^\circ$ (als Nebenwinkelpaar)

also $\delta = 180^\circ - \gamma'$

$\delta = 180^\circ - 70^\circ$

$\delta = 110^\circ$

2. Um die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen, muß der Wagen eine Strecke zurücklegen, deren Länge ein gemeinsames Vielfaches, und zwar das kleinste gemeinsame Vielfache, von 210 cm und 330 cm ist. Daher ermitteln wir das k.g.V. von 210 und 330: — 8 Punkte

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

k.g.V.: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$

Die kürzeste Strecke, die vom Wagen zurückgelegt werden muß, bis jedes Rad genau eine ganze Anzahl von

Umdrehungen durchgeführt hat, ist daher

$$2310 \text{ cm} = 23{,}10 \text{ m lang.}$$

Probe:

$2310 : 210 = 11$

$2310 : 330 = 7$

Die Vorderräder machen dabei genau 11, die Hinterräder genau 7 Umdrehungen.

3\. Bezeichnet man die Ringzahl der Schützen mit den Anfangsbuchstaben der entsprechenden Vornamen, so erhält man aus den Angaben der Aufgabe, — 12 Punkte

(1) $J > G$ (2) $E + R = J + G$

(3) $E + J < R + G$.

Aus (2) und (3) ergibt sich durch Addition

$2E + J + R < 2G + J + R$, also $E < G$.

Hieraus und aus (2) folgt $R - J = G - E > 0$,

also $J < R$.

Daher gilt

$$R > J > G > E.$$

Die gesuchte Reihenfolge ist:

Regina, Joachim, Gerd, Elke.

4\. Schüler mit Preisen oder Anerkennungsschreiben: — 10 Punkte

8 Sch. $\triangleq \frac{2}{9}$ der Teilnehmer an der 2. Stufe.

Daraus folgt:

4 Sch. $\triangleq \frac{1}{9}$ der Teilnehmer an der 2. Stufe,

und

36 Sch. $\triangleq \frac{9}{9}$ (das sind alle Teilnehmer dieser Schule an der 2. Stufe)

Laut Aufgabe gilt weiterhin:

36 Sch. $\triangleq \frac{3}{40}$ der Teilnehmer an der 1. Stufe,

also

12 Sch. $\triangleq \frac{1}{40}$ der Teilnehmer an der 1. Stufe

und

480 Sch. $\triangleq \frac{40}{40}$ (das sind alle Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe).

Genau 480 Schüler dieser Schule beteiligten sich an der 1. Stufe der Mathematikolympiade.