A 11/12 I

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 11/12 - 1. Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

1. In ein und derselben Ebene seien n Punkte ($n \geq 2$) so verteilt, daß es zu jedem von ihnen unter den übrigen nur einen nächstgelegenen gibt. Zu jedem dieser n Punkte werde der von ihm ausgehende und in dem ihm nächstgelegenen Punkt endende Vektor und nur dieser gezeichnet.
Man ermittle die größtmögliche Anzahl derjenigen unter diesen Vektoren, die dann in einem und demselben der n Punkte enden können!

2. Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels. Eine seiner Seitenflächen sei das Quadrat ABCD, der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche sei M.
Wie groß ist der Abstand zwischen den Geraden BC und AM?
(Unter dem Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden g, h versteht man die Länge derjenigen Strecke XY, die folgende Eigenschaften hat: X liegt auf g, Y liegt auf h, $XY \perp g$, $XY \perp h$).

3. Es sind alle diejenigen reellen Zahlen x in den Intervallen $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ anzugeben, für die

$$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$$

positiv ist, und alle diejenigen reellen Zahlen x, in denselben Intervallen, für die f (x) negativ ist!
Gibt es einen kleinsten positiven Wert, den f (x) in den obigen Intervallen annimmt, und wenn ja, welcher Wert ist dies?

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 11/12 - 2. Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

4. Man ermittle alle und nur diejenigen reellen Zahlen x, die der Gleichung

$$\left[\frac{5 + 6x}{8}\right] = \frac{15x - 7}{5}$$

genügen!

Dabei bedeutet $[a]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als a ist; z.B. ist

$$\left[\frac{13}{2}\right] = 6, \quad [-6{,}5] = -7 \text{ und } [6] = 6.$$

5. Es seien n Schüler mit Nummern versehen und in der Reihenfolge 1, 2, ..., n nebeneinander aufgestellt. Ein Umordnungsbefehl bestehe darin, daß jeder entweder einmal seinen Platz mit einem anderen tauscht oder auf seinem Platz bleibt. Man gebe zwei Befehle an, durch deren Hintereinanderausführung die Anordnung
n, 1, 2, ..., n - 1 entsteht!

6. Die Zahl $\sin 10^\circ$ genügt einer Gleichung dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten.
Man stelle diese (bis auf einen gemeinsamen Teiler aller Koeffizienten eindeutig bestimmte) Gleichung auf und ermittle ihre beiden anderen Wurzeln!

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1. Wir beweisen zunächst den folgenden 9 Punkte

Hilfssatz: Sind P_i, P_j, P_k drei der n zu betrachtenden Punkte und enden die von P_i und P_j ausgehenden Vektoren beide in P_k, so ist $\sphericalangle P_iP_kP_j$ größer als 60°.

Beweis: Wäre dieser Winkel $\leqq 60^\circ$, so bildeten P_i, P_j, P_k die Ecken eines Dreiecks, in dem nicht der Winkel bei P_k größer als jeder der beiden anderen Winkel wäre. Daher wäre nicht die Seite P_iP_j länger als jede der beiden anderen Seiten. Folglich würden nicht beide von P_i und P_j ausgehenden Vektoren in P_k enden. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Ist jetzt P_k irgendeiner der n Punkte, so folgt aus dem Hilfssatz, daß höchstens 5 Vektoren in P_k enden können; denn andernfalls müßten wenigstens zwei von ihnen einen Winkel einschließen, der $\leqq 60^\circ$ ist.

Ist $n \leqq 5$, so können höchstens n - 1 der Vektoren in P_k enden, da nicht mehr nicht von P_n ausgehende Vektoren vorhanden sind.

Um zu zeigen, daß die angegebenen Schranken die Maximalzahlen sind, genügt es, ein Beispiel anzugeben, bei dem diese Werte angenommen werden. Wir denken uns 5 von P_n ausgehende Strahlen s_v, $v = 1, 2, 3, 4, 5$, von denen keine zwei einen Winkel $< 72^\circ$ einschließen. Im Falle $n \geqq 6$ liege P_v auf s_v, $v = 1, 2, 3, 4, 5$, (im Falle $n \leqq 5$ nur die P_v mit $v = 1, 2, \ldots, n - 1$) und habe

-2-

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

von P_n den Abstand $1 + v\,d$, wobei d eine noch näher zu bestimmende Zahl bedeutet, für die $0 < d < 0{,}1$ gilt.

Falls weitere P_v vorhanden sind (also in den Fällen $n \geqq 7$), so mögen diese außerhalb des Kreises k um P_n mit dem Radius von der Länge 3 liegen. Dann enden die von den P_v ($v=1,\ldots 5$, im Falle $n \geqq 6$; $v=1,\ldots,n-1$ im Falle $n<6$) ausgehenden Vektoren alle in P_n. Dazu ist zu zeigen, daß für diese P_v stets P_n der P_v nächstgelegene Punkt ist.

Jeder der außerhalb k gelegenen Punkte hat von jedem der in Rede stehenden P_v einen Abstand $> 1{,}5$, während P_n von jedem dieser P_v einen Abstand $< 1 + 5 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$ hat. Der Abstand irgend zweier der ersten fünf (bzw. n-1) P_v ist größer als die (Länge einer Seite) Seitenlänge eines einem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen Fünfecks.

Diese beträgt

$$2 \sin \frac{\pi}{5} = 2 \sin 36^\circ = 2 \sin 30^\circ + 2(\sin 36^\circ - \sin 30^\circ) = 1 + 2(\sin 36^\circ - \sin 30^\circ).$$

Wählt man nun d so, daß außer $0<d<0{,}1$ noch $5\,d<2(\sin 36^\circ - \sin 30^\circ)$ ausfällt (wozu nach Tafel $d = 0{,}035$ ausreicht), so ist der Abstand zweier der ersten fünf (bzw. n-1) P_v stets größer als der Abstand jedes dieser P_v von P_n.

2. ABFE sei die an ABCD in AB angrenzende Seitenfläche. Die Parallele durch M zu BC schneidet die Strecke EF in ihrem Mittelpunkt K. Da XY auf AM und auf der zu KM parallelen Strecke BC senkrecht steht, steht XY senkrecht auf der Ebene ${\varepsilon}$AKM. Da BC zu dieser Ebene parallel ist, so ist XY auch gleich der Länge BZ des Lotes von B auf sie. — 6 Punkte

Nun sind die Ebenen ε_{ABFE} und ε_{AKM} aufeinander senkrecht (denn KM steht senkrecht auf ε_{ABFE}). Also liegt BZ in der Ebene ε_{ABFE} und ist folglich das Lot von B auf AK. Nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck ΔAKE, ist $\overline{AK} = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{5}$. Wegen $\Delta BAZ \sim \Delta AKE$ ist somit

$$\overline{XY} = \overline{BZ} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AE}}{\overline{AK}} = \frac{a^2}{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\,a\cdot\sqrt{5}\,.$$

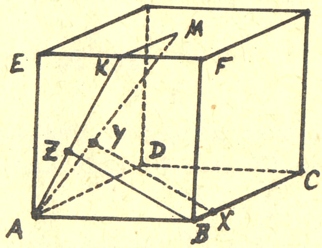

Abb. L 11/12;2

3. (a) Es ist — 6 Punkte

$$f(x) = \sin x + \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x\,(\cos x + 1) + \cos^2 x\,(\sin x + 1)}{\sin x \cos x}$$

Für alle zu untersuchenden x ist der Zähler dieses Bruches positiv. Die Untersuchung des Nenners ergibt somit

$$f(x) > 0 \text{ für } 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,$$

$$f(x) < 0 \text{ für } \frac{\pi}{2} < x < \pi\,.$$

(b) Es ist

$$f(x) = \sqrt{2}\,(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$= \sqrt{2}\,\sin(\frac{\pi}{4} + x) + \frac{2}{\sin 2x}\,.$$

Nach (a) ist für Aufgabe (b) nur noch das Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ zu untersuchen. In diesem ist

$$\sin 2x \leqq \sin(\frac{\pi}{4} + x)\;;$$

dies folgt nämlich für

$$0 < x \leqq \frac{\pi}{4} \text{ aus } 0 < 2x \leqq \frac{\pi}{4} + x \leqq \frac{\pi}{2},$$

für $\frac{\pi}{4} \leqq x < \frac{\pi}{2}$ aus $0 < \pi - 2x \leqq \frac{3\pi}{4} - x \leqq \frac{\pi}{2}$,

da sin x im Intervall $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ streng monoton steigt.

Somit ergibt sich

$$f(x) - (2 + \sqrt{2}) \geqq \sqrt{2} \sin 2x + \frac{2}{\sin 2x} - 2 - \sqrt{2}$$

$$= \left(\frac{2}{\sin 2x} - \sqrt{2}\right)(1 - \sin 2x)$$

$$\geqq 0.$$

In den hier genannten Ungleichungen mit Doppelzeichen ($\leqq$ oder $\geqq$) gilt das Gleichheitszeichen für $x = \frac{\pi}{4}$.

Also ist $2 + \sqrt{2}$ der gesuchte kleinste positive Funktionswert.

Hinweis für die Korrektoren:

Zu Lösungsversuchen von Aufgabe (b) mit Hilfe der Differentialrechnung ist folgendes zu beachten:

Es ist

$$f'(x) = \cos x - \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(1) \quad = (\sin^2 x - \cos^2 x)\left(\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - \frac{1}{\sin x + \cos x}\right).$$

Im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ist

$$0 < \sin^2 x \cos^2 x < \sin x < \sin x + \cos x,$$

also der zweite Faktor in (1) positiv, und der erste Faktor ($-\cos 2x$) hat in diesem Intervall genau die Nullstelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Um nun aber zu schließen, daß $f(x_0)$ der kleinste Funktionswert in dem Intervall ist, sind noch weitere Überlegungen erforderlich, selbst dann noch, wenn man auch $f''(x_0) > 0$ festgestellt hat. Ausreichend sind z.B. folgende Beweismöglichkeiten:

I. Möglichkeit: Aus dem bisher Gesagten folgt: $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ist die einzige Stelle des Intervalls $0 < x < \frac{\pi}{2}$, an der ein lokales Extremum vorliegt, und dieses ist ein Minimum. Hieraus und aus der Stetigkeit folgt, daß $f(x_0)$ der kleinste Funktionswert ist (doch ist der Beweis nicht etwa von vornherein selbstverständlich): Angenommen, es gäbe ein $x_1 \neq x_0$ in dem Intervall mit $f(x_1) \leq f(x_0)$. Nach dem Satz von Weierstraß hätte $f(x)$ dann in dem abgeschlossenen Intervall zwischen x_0 und x_1 einen größten Funktionswert. Dieser könnte, da bei x_0 ein lokales Minimum vorliegt (und $f(x)$ nicht konstant ist), nicht an der Stelle x_0 angenommen werden, erst recht also nicht an der Stelle x_1. Folglich gäbe es ein weiteres lokales Extremum; Widerspruch.

II. Möglichkeit: Wegen $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = +\infty$ gibt es a, b mit $0 < a < \frac{\pi}{4} < b < \frac{\pi}{2}$ so, daß für $0 < x \leq a$ und für $b \leq x < \frac{\pi}{2}$ stets $f(x) > f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ gilt. Nach dem Satz von Weierstraß hat $f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ einen kleinsten Funktionswert. Aus dem eben Gezeigten folgt dann 1.): Dieser Funktionswert wird an einer Stelle x_0 mit $a < x_0 < b$ angenommen; daher gilt $f'(x_0) = 0$, also muß $x_0 = \frac{\pi}{4}$ sein.

2.) $f(x_0)$ ist zugleich der kleinste Funktionswert für das ganze Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

III. Möglichkeit: Für $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ist $f'(x) < 0$; für $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ist $f'(x) > 0$. Also ist $f(x)$ im Intervall $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ streng monoton fallend und im Intervall $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$ streng monoton steigend. Daraus folgt die Behauptung. (Auch bei der II. und III. Möglichkeit wird die Stetigkeit ausgenutzt).

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

4. Angenommen, für ein x gilt $\left[\frac{5 + 6x}{8}\right] = \frac{15x - 7}{5}$. 5 Punkte

Dann ist $\frac{15x - 7}{5} \leqq \frac{5 + 6x}{8} < \frac{15x - 7}{5} + 1$.

Hieraus folgt durch Multiplikation mit 4:

$$12x - \frac{28}{5} \leqq \frac{5}{2} + 3x < 12x - \frac{8}{5},$$

also

$$\frac{41}{10} < 9x \leqq \frac{81}{10},$$

und weiter nach Division durch 3 und Subtraktion von $\frac{7}{5}$:

$$-\frac{1}{30} < \frac{15x - 7}{5} \leqq \frac{13}{10}.$$

Da $\frac{15x - 7}{5}$ ganz ist, folgt weiter:

$$\frac{15x - 7}{5} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{15x - 7}{5} = 1,$$

hieraus

$$x = \frac{7}{15} \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{4}{5}.$$

Durch Umkehrung dieser Schlüsse oder durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung ("Probe") zeigt man, daß diese beiden Werte Lösung der Gleichung sind. Also hat die Gleichung genau diese beiden Lösungen.

5. Der <u>erste Befehl</u> bewirke die Umkehrung der natürlichen Reihenfolge, also die (bis auf eventuell eine Ausnahme festbleibender Nummer) paarweisen Vertauschungen 7 Punkte
$1 \leftrightarrow n$, $2 \leftrightarrow n - 1$, $3 \leftrightarrow n - 2$, ... oder allgemein $k \leftrightarrow n + 1 - k$ mit $k = 1, 2, \ldots, n$. Wenn n gerade ist, bleibt kein Schüler auf seinem Platz; bei ungeradem n dagegen behält der Schüler mit

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

der Nummer $\frac{n+1}{2}$ seinen Platz bei.

Der <u>zweite Befehl</u> beläßt Schüler n auf seinem Platz und bewirkt die Umkehrung der Reihenfolge aller übrigen, also die paarweisen Vertauschungen

$1 \leftrightarrow n-1$, $2 \leftrightarrow n-2$, $3 \leftrightarrow n-3$, ... (bis auf eventuell eine Ausnahme festbleibender Nummer) oder allgemein

$1 \leftrightarrow n-m$ mit $m = 1, 2, \ldots, n-1$. Dabei gilt für das Verbleiben eines der übrigen Schüler auf seinem Platz die analoge Feststellung: Wenn n gerade ist, behält der Schüler mit der Nummer $\frac{n}{2}$ seinen Platz bei, dagegen bleibt bei ungeradem n kein Schüler auf seinem Platz.

Man gewinnt einen besonders anschaulichen Einblick, wenn man etwa für n = 7 (ungerade) und n = 8 (gerade) die stufenweise Umordnung durch die beiden Befehle verfolgt.

$n = 7 \quad 1\ 2\ 3\ \underline{4}\ 5\ 6\ 7 \qquad n = 8 \quad 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8$

$\qquad\quad \underline{7}\ 6\ 5\ \underline{4}\ 3\ 2\ 1\ ; \qquad\qquad \underline{8}\ 7\ 6\ 5\ \underline{4}\ 3\ 2\ 1$

$\qquad\quad \underline{7}\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \qquad\qquad\quad \underline{8}\ 1\ 2\ 3\ \underline{4}\ 5\ 6\ 7$

Dabei sind die jeweils auf ihren Plätzen verbleibenden Schüler durch Unterstreichen ihrer Nummern hervorgehoben.

6. Da für jeden Winkel mit dem Gradmaß α — 7 Punkte

$$\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha \qquad (1)$$

gilt und da

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

ist, genügt die Zahl

$$x_1 = \sin 10^\circ$$

sicher der kubischen Gleichung

$$3x - 4x^3 = \frac{1}{2}$$

oder

$$8x^3 - 6x + 1 = 0. \qquad (3)$$

Wegen (1) und (2) und wegen

$$\sin(30^\circ + k \cdot 360^\circ) = \frac{1}{2} ,$$

wobei k eine ganze Zahl ist,
ist die Gleichung (3) aber auch erfüllt für

$$x_2 = \sin(10^\circ + 1 \cdot 120^\circ) = \sin 50^\circ$$

und

$$x_3 = \sin(10^\circ + 2 \cdot 120^\circ) = -\sin 70^\circ .$$

Die Zahlen x_1, x_2, x_3 sind paarweise untereinander verschieden, und da die Gleichung (3) höchstens drei paarweise voneinander verschiedene Wurzeln hat, sind x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der Gleichung (3).