A 11/12;I

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesonders, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

1. Beweisen Sie folgenden Satz:
Sind α, β, γ die Gradmaße der Winkel eines beliebigen ebenen Dreiecks, so gilt stets
$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha = 1$.

2. In einer Ebene seien die vier Punkte P, Q, R, S, $P \neq Q$, $R \neq S$, PQ nicht senkrecht auf RS gegeben. Es ist zu zeigen, daß man dann stets vier Geraden p, q, r, s mit P auf p, Q auf q, R auf r und S auf s so konstruieren kann, daß ihre sämtlichen Schnittpunkte die Ecken eines Quadrates bilden!

3. Beweisen Sie folgende Behauptung:
Ist $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ durch 30 teilbar, dann ist auch
$p = a_1^5 + a_2^5 + \ldots + a_n^5$ durch 30 teilbar.
($a_1, a_2, \ldots a_n$ seien n ganze Zahlen)

30 02 23-1 1000/66 (E)

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

4. Es sei M der Mittelpunkt der Kugel K_1 und P sei ein Punkt außerhalb K_1. Ferner sei K_2 die Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius von der Länge $\overline{MP}$, und I_F sei der Flächeninhalt des innerhalb K_1 liegenden Teiles von K_2.

Beweisen Sie, daß I_F von der Lage des Punktes P unabhängig ist!

5. Es seien n, p, r, s natürliche Zahlen.
Ferner sei

$$u = \frac{(r + s\cdot\sqrt{p})^n + (r - s\cdot\sqrt{p})^n}{2}$$

$$v = \frac{(r + s\cdot\sqrt{p})^n - (r - s\cdot\sqrt{p})^n}{2\cdot\sqrt{p}}$$

$$t = r^2 - s^2 p, \quad z = u^2 - t^n .$$

Man beweise:

a) u und v sind natürliche Zahlen.

b) Die (somit ganze) Zahl z ist durch v^2 ohne Rest teilbar.

30 02 23-1 1000/66 (E)

6. a) Geben Sie alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z) an, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \qquad (1) \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

erfüllen!

b) Bilden Sie alle Gleichungssysteme, die sich von dem Gleichungssystem (1) in genau einem Koeffizienten unterscheiden und unendlich viele Lösungen besitzen!
(Als "Koeffizienten" seien hier sowohl die auf den "linken Seiten" stehenden "Vorzahlen" der Variablen als auch die "absoluten Glieder" auf den "rechten Seiten" bezeichnet.)
Geben Sie auch in diesen Fällen alle Tripel reeller Zahlen an, die die jeweiligen Gleichungssysteme erfüllen!

c) Bilden Sie ein Gleichungssystem, das sich von (1) in genau zwei Koeffizienten unterscheidet, das aber von keinem Tripel reeller Zahlen erfüllt wird!

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Es gilt $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$ (✱), 6 Punkte

worin die Division wegen $\cot\alpha + \cot\beta \neq 0$ stets möglich ist; denn $\cot\alpha + \cot\beta = 0$ würde $\cot\alpha = -\cot\beta$, also wegen $\cot\alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$ und der eindeutigen Umkehrbarkeit der Kotangens-Funktion für Winkel zwischen 0° und 180° weiter $\beta = 180^\circ - \alpha$ zur Folge haben. Somit müßte $\gamma = 0$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.
Es ist $\cot\gamma = -\cot(\alpha+\beta)$, woraus durch Berücksichtigung von (✱) zunächst

$$\cot\gamma = \frac{1 - \cot\alpha \cot\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} \text{ und damit}$$

$$\cot\alpha \cdot \cot\gamma + \cot\beta \cdot \cot\gamma = 1 - \cot\alpha \cdot \cot\beta$$

oder

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha = 1$$

folgen.

2.

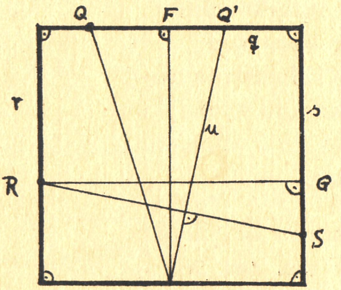


Abb. L 11/12; 2a

I.) <u>Analyse:</u> Angenommen, p,q,r,s seien Lösung, und zwar so, daß $p \parallel q$ und $r \parallel s$ ist (Abb.L 11/12;2a). 8 Punkte
Da das von p,q,r,s gebildete Quadrat nicht entartet ist, gilt dabei $p \neq q$ und $r \neq s$. Daher ist RS nicht parallel zu r. Also ist

30 02 23-1 1000/66 (E)

das Lot u von P auf RS nicht parallel zu q. Folglich schneiden sich u und q; der Schnittpunkt sei Q'. Sind F, G die Fußpunkte der Lote von P, R auf q, s, so wird Δ PFQ' $\cong$ Δ RGS (Übereinstimmung der Winkel und $\overline{PF}$ = $\overline{RG}$), also ergibt sich $\overline{PQ}$' = $\overline{RS}$.

II. Falls es also Lösungen mit p $\parallel$ q und r $\parallel$ s gibt, so können es nur diejenigen sein, die die folgende Konstruktion liefert: Man fälle das Lot u von P auf RS und schlage den Kreis um P mit dem Radius von der Länge $\overline{RS}$. Er schneidet u in zwei Punkten, einer von diesen sei Q'. Da PQ nicht senkrecht auf RS steht, liegt Q nicht auf u, also ist Q $\neq$ Q'. Dann konstruiere man q als Verbindungsgerade von Q und Q'; p als Parallele durch P zu q; r, s als Lote von R, S auf q.

III. Beweis, daß die konstruierten p, q, r, s Lösung sind:
Nach Konstruktion liegt P auf p, Q auf q, R auf r, S auf s; ferner bilden p, q, r, s ein Rechteck, und zwar so, daß p $\parallel$ q und r $\parallel$ s ist. Da Q nicht auf u = PQ' liegt, liegt P nicht auf QQ' = q, also ist p $\neq$ q. Da u nicht parallel zu q ist, ist u nicht senkrecht auf r, also ist RS nicht parallel zu r, also ist auch r $\neq$ s. Daher ist das Rechteck nicht entartet. Sind F, G die Fußpunkte der Lote von P, R auf q, s, so wird Δ PFQ' $\cong$ Δ RGS (Übereinstimmung der Winkel und $\overline{PQ}$' = $\overline{RS}$), also ergibt sich $\overline{PF}$ = $\overline{RG}$.
Folglich ist das Rechteck ein Quadrat.

Zur weiteren Orientierung der Korrektoren sei noch die folgende Diskussion angefügt, die von den Schülern nicht mehr verlangt wird:

IV. Die Konstruktion ergibt wegen der Zweideutigkeit von Q' zwei Lösungen mit p $\parallel$ q und r $\parallel$ s. (Die Frage des Zusammenfallens von Lösungen soll hier nicht weiter untersucht werden.)

V. Wir behaupten nun: Nach geeigneter Permutation von P, Q, R, S gilt außer der Voraussetzung

(U) : $P \neq Q$, $R \neq S$, PQ nicht senkrecht zu RS

auch

(U'): $P \neq R$, $Q \neq S$, PR nicht senkrecht zu QS.

Beweis: Wäre weder $P \neq R$, $Q \neq S$ noch $P \neq S$, $Q \neq R$ richtig, so folgte in jedem Fall ein Widerspruch gegen (U); also kann zunächst durch eventuelle Vertauschung von R, S erreicht werden, daß außer der Voraussetzung (U) (die von der Vertauschung unberührt bleibt) auch $P \neq R$, $Q \neq S$ gilt. Ist dann (erster Fall:) $P = S$, $Q = R$, so besagt PQ nicht senkrecht zu RS schon

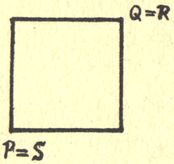


Abb. L 11/12; 2b

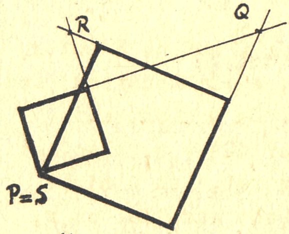


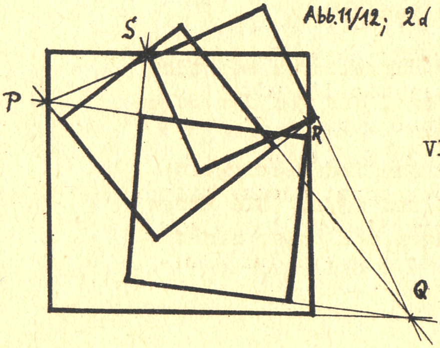
Abb. L 11/12; 2c

dasselbe wie PR nicht senkrecht zu QS. Ist aber (zweiter Fall:) $P \neq S$, $Q \neq R$, so sind P, Q, R, S sämtlich voneinander verschieden; ferner zöge die Gültigkeit von zwei der Relationen

(H): $PQ \perp RS$, $PR \perp QS$, $PS \perp QR$

auch die dritte nach sich (Satz vom Höhenschnittpunkt), was (U) widerspricht; also kann erreicht

Abb. 11/12; 2d



werden, daß $(H)_{1,2}$ beide nicht zutreffen und folglich (U), (U') gelten.

VI. Wir erhalten daher: Es gibt zwei weitere Lösungen, nämlich mit $p \parallel r$ und $q \parallel s$. Aus I. folgt ferner, daß die bisher genannten Lösungen jeweils die einzigen ihrer Art sind. (Die Frage des Zusammenfallens von Lösungen soll hier nicht weiter untersucht werden). (Abb. L 11/12; 2b,c,d).

VII.a) Falls nun außer (U), (U') auch noch $P \neq S$, $Q \neq R$, PS nicht senkrecht zu QR gilt, so gibt es noch zwei weitere Lösungen, nämlich mit $p \parallel s$ und $q \parallel r$, und zwar sind auch dies die einzigen ihrer Art. (Die Frage des Zusammenfallens von Lösungen soll hier nicht weiter untersucht werden). (Abb. L 11/12;2e).

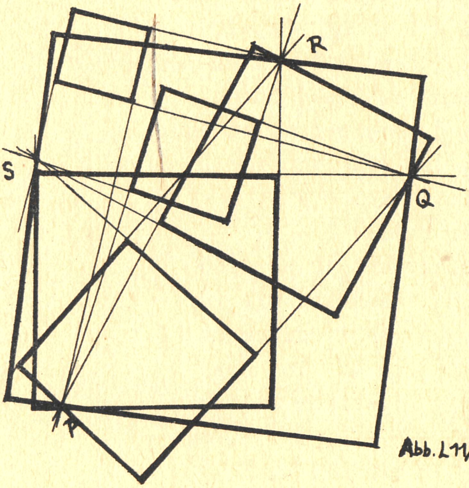


Abb. L 11/12; 2e

b) Gilt aber $P = S$ oder $Q = R$, so kann es keine Lösung mit $p \parallel s$, $q \parallel r$ geben, da eine solche $p = s$ bzw. $q = r$, also den Ausartungsfall für das Quadrat pqrs ergäbe (Abb. L 11/12;2 bρ),

c) Gilt $P \neq S$, $Q \neq R$, $PS \perp QR$, $\overline{PS} \neq \overline{QR}$, so kann es ebenfalls keine Lösung mit $p \parallel s$, $q \parallel r$ geben, wie aus I. mit P, S, R, Q; p, s, r, q statt der dortigen P, Q', R, S; p, q, r, s folgt (Abb. L 11/12; 2d).

d) Gilt schließlich $P \neq S$, $Q \neq R$, $PS \perp QR$, $\overline{PS} = \overline{QR}$ so erhält man unendlich viele Lösungen mit $p \parallel s$, $q \parallel r$. Denn führt man II. mit P, S, R, Q; S; p, s (beliebig durch S), r, q statt der dortigen P, Q, R, S; Q'; p, q, r, s durch und schließt von den entstandenen unendlich vielen Vierecken pqrs die endlich vielen entarteten aus, so bleiben die auf Inzidenz-

Rechtecks- und Quadrateigenschaft bezüglichen Teile von III. richtig (Abb. L 11/12; 2f; die Lösungen nach IV., VI. sind nicht mit eingezeichnet.).

VIII. Zu den voraussetzungsgemäß ausgeschlossenen Fällen sei zur besseren Klärung noch folgendes erwähnt:

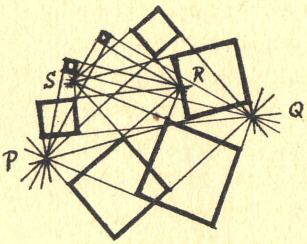


Abb. 11/12; 2f

Wie aus V. hervorgeht, läßt sich die Voraussetzung, bei geeigneter Reihenfolge von P, Q, R, S solle (U) gelten, auch (symmetrisch, aber umständlicher) so formulieren: Es seien ausgeschlossen die Fälle

(A_1): Mindestens drei der Punkte P,Q,R,S fallen zusammen,

(A_2): Drei der Punkte P,Q,R,S bilden ein nicht entartetes Dreieck, und der vierte ist dessen Höhenschnittpunkt.

(Als Aufgabenstellung wurde der Text "(U)" gewählt, da der Text "(A_1), (A_2) seien ausgeschlossen" eine vom wesentlichen Lösungsweg I., II., III. ablenkende Vorarbeit erfordert hätte.)

IX. Findet (A_1) statt, so gibt es keine Lösung der Aufgabe. Beweis wie in VII b.

X. Findet (A_2) statt, etwa mit ΔPQR als nicht entartetem Dreieck und S als Höhenschnittpunkt, so gibt es

a) im Fall $\overline{PQ} \neq \overline{RS}$, $\overline{PR} \neq \overline{QS}$, $\overline{PS} \neq \overline{QR}$ keine Lösung der Aufgabe (Beweis wie in VII c),

b) im Fall $\overline{PQ} = \overline{RS}$ oder $\overline{PR} = \overline{QS}$ oder $\overline{PS} = \overline{QR}$ (wobei höchstens eine dieser Gleichungen gelten kann; denn gälten zwei, so wären die gleichen Seitenpaare Gegenseiten im Parallelogramm, also nicht senkrecht) unendlich viele Lösungen der Aufgabe. Beweis wie in VII d.

3. Beweis: (1) Es genügt (im wesentlichen) zu zeigen, daß p-s durch 30 teilbar ist. Ist nämlich p-s durch 30 teilbar, so ist auch $p = (p-s) + s$ durch 30 teilbar. 6 Punkte

(2.1) Es ist: $p-s = (a_1^5 - a_1) + (a_2^5 - a_2) + \dots + (a_n^5 - a_n)$.

Da für alle k ($k = 1,2,\dots,n$)

(*) $d_k = a_k^5 - a_k = a_k\,(a_k-1)(a_k+1)(a_k^2+1)$

gilt und da alle a_k ganze Zahlen sind, ist jedes d_k sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar; d.h., jedes d_k ist durch 6 teilbar.

(2.2) Man kann leicht zeigen, daß jedes d_k auch durch 5 teilbar ist.

Weg I: Wenn $a_k \equiv 0 \pmod 5$ ist, so ist $d_k \equiv 0 \pmod 5$.

Wenn $a_k \equiv 1 \pmod 5$ oder wenn $a_k \equiv -1 \pmod 5$ ist, so ist wegen (*) auch $d_k \equiv 0 \pmod 5$.

Wenn $a_k \equiv 2 \pmod 5$ oder wenn $a_k \equiv -2 \pmod 5$ ist, so ist $a_k^2 \equiv -1 \pmod 5$, d.h. $a_k^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$, und daher ist auch $d_k \equiv 0 \pmod 5$.

Weg II: Ist a_k durch 5 teilbar, so ist wegen (*) auch d_k durch 5 teilbar.

Ist a_k nicht durch 5 teilbar, so läßt sich für jedes dieser a_k genau eine der folgenden Darstellungen angeben:

(a) $a_k = 5b_k + 1$ (b) $a_k = 5b_k - 1$

(c) $a_k = 5b_k + 2$ (d) $a_k = 5b_k - 2$

(dabei ist b_k eine ganze Zahl).

Im Fall (a) ist in (*) $a_k - 1$, im Fall (b) $a_k + 1$ und damit auch d_k durch 5 teilbar. In den Fällen (c) und (d) ist in (*)

$$a_k^2 + 1 = 25b_k^2 + 20b_k + 5 = 5 \cdot (5b_k^2 + 4b_k + 1) \text{ bzw.}$$

$$a_k^2 + 1 = 5\,(5b_k^2 - 4b_k + 1)$$

und damit auch d_k durch 5 teilbar.

Folglich ist bei beliebiger Wahl ganzzahliger a_k jedes d_k durch 5 teilbar.

(2.3) Da alle d_k sowohl durch 6 als auch durch 5 teilbar und da ferner 5 und 6 teilerfremd zueinander sind, sind alle d_k und damit auch p-s durch 30 teilbar.

L 11/12;II

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

<u>Lösungen und Punktbewertung</u>

Olympiadeklassen 11 / 12 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

4. Der Radius von K_1 habe die Länge r. Man lege eine Ebene ε durch M und P. Der Schnittkreis k von K_1 und K_2 schneidet ε in zwei Punkten Q_1, Q_2; der Schnittpunkt von MP und Q_1Q_2 sei S genannt. 6 Punkte

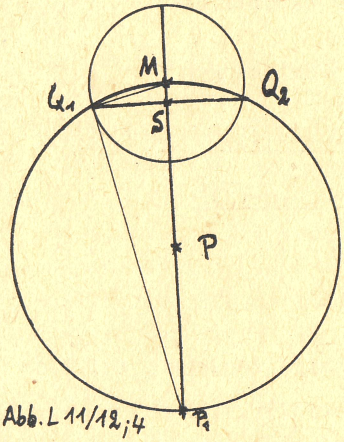


Abb. L 11/12;4

Dann ist I_F der Flächeninhalt der auf K_2 liegenden Kugelkappe, deren Höhe die Länge $\overline{MS}$ hat. Da $\overline{MP}$ die Länge des Radius von K_2 ist, gilt mithin:

$$(*) \quad I_F = \pi \cdot 2 \cdot \overline{MP} \cdot \overline{MS} .$$

Da das Dreieck $\triangle MQ_1P_1$ rechtwinklig ist, gilt in ihm nach dem Kathetensatz: $\overline{MQ_1}^2 = 2\overline{MP}\cdot\overline{MS}$. Mithin erhält man:

$$I_F = \pi \cdot \overline{MQ_1}^2 = \pi r^2 ,$$

und dies ist von der Lage des Punktes P unabhängig.

5. a) Wendet man auf u und v den binomischen Lehrsatz an, so erhält man 6 Punkte

$$u = \frac{1}{2}\Big[r^n + \binom{n}{1} r^{n-1} s\cdot\sqrt{p} + \binom{n}{2} r^{n-2} s^2 p +$$

$$+ \binom{n}{3} r^{n-3} s^3 p\cdot\sqrt{p} + \ldots + r^n - \binom{n}{1} r^{n-1} s\cdot\sqrt{p} +$$

$$+ \binom{n}{2} r^{n-2} s^2 p - \binom{n}{3} r^{n-3} s^3 p\cdot\sqrt{p} +-\ldots\Big]$$

$$= r^n + \binom{n}{2} r^{n-2} s^2 p + \ldots ,$$

und

-2-

30 02 23-1 1000/66 (E)

$$v = \frac{1}{2\cdot\sqrt{p}} \Big[r^n + \tbinom{n}{1} r^{n-1} s\cdot\sqrt{p} + \tbinom{n}{2} r^{n-2} s^2 p +$$

$$+ \tbinom{n}{3} r^{n-3} s^3 p\cdot\sqrt{p} + \ldots - r^n + \tbinom{n}{1} r^{n-1} s\cdot\sqrt{p} -$$

$$- \tbinom{n}{2} r^{n-2} s^2 p + \tbinom{n}{3} r^{n-3} s^3 p\cdot\sqrt{p} - + \ldots\Big]$$

$$= \tbinom{n}{1} r^{n-1} s + \tbinom{n}{3} r^{n-3} s^3 p + \ldots ,$$

woraus unmittelbar folgt, daß u und v natürliche Zahlen sind.

b) Unter Berücksichtigung der gegebenen Beziehungen erhält man

$$z = \frac{(r + s\cdot\sqrt{p})^{2n} + 2\,(r^2 - s^2p)^n + (r - s\cdot\sqrt{p})^n}{4} - (r^2-s^2p)^n$$

$$= \frac{(r + s\cdot\sqrt{p})^{2n} - 2\,(r^2 - s^2p)^n + (\,r - s\cdot\sqrt{p})^2}{4}$$

$$= v^2 p$$

Die Zahl z ist also durch v^2 teilbar.

6. a) $x = \frac{1}{2}$; $y = 0$; $z = 0$ ist das einzige Zahlentripel, das das Gleichungssystem erfüllt. (Lösung nach dem üblichen Algorithmus). 8 Punkte

b) <u>1. Lösungsweg:</u> Bei drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten (wobei keine der Gleichungen die Form $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$ hat) erhält man in genau zwei Fällen eine unendliche Menge von Tripeln reeller Zahlen als Lösung: 1. wenn eine Gleichung von einer anderen (linear) abhängig ist, 2. wenn eine Gleichung von den beiden anderen (linear) abhängig ist, aber keine zwei voneinander linear abhängig sind. Den ersten Fall kann man durch Änderung eines Koeffizienten dann und nur dann erreichen, wenn der Quotient von je zwei entsprechenden Koeffizienten zweier Gleichungen in drei Fällen gleich ist (da in (1) kein Koeffizient 0 ist, existieren alle angegebenen Quotienten). Dies ist aber nur bei der ersten und zweiten Gleichung der Fall. Durch

Änderung eines Koeffizienten von y erhält man somit als für den ersten Fall einzige die folgenden beiden Gleichungssysteme, die der Aufgabenstellung genügen:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x + 6y + 2z &= 2 \quad (2) \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x - \tfrac{1}{2}y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \quad (3) \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

Im zweiten Fall erhält man ein Gleichungssystem, das der Forderung der Aufgabe entspricht, dann und nur dann, wenn sich von den vier Koeffizienten einer Gleichung drei durch dieselbe Linearkombination (mit von 0 verschiedenen Faktoren) aus den entsprechenden Koeffizienten der beiden anderen ergeben.

Die einzige Möglichkeit hierzu liegt im System (1) bei den Koeffizienten von x, y und den absoluten Gliedern vor. Dies zeigt die Betrachtung der vier aus je drei Gleichungen bestehenden Teilsysteme des Systems

$$\begin{aligned} (X)&: 2p + 4q + 8r = 0 \\ (Y)&: 3p - q + 5r = 0 \\ (Z)&: p + 2q + 3r = 0 \\ (A)&: p + 2q + 4r = 0 \end{aligned}$$

Das Teilsystem (X), (Y), (Z) hat nämlich nur die triviale Lösung, und jedes Teilsystem, das (Z) und (A) enthält, ergibt für seine Lösungen notwendig $r = 0$. Das Teilsystem (X), (Y), (A) hingegen hat in der Tat Lösungen (p, q, r) mit $p \neq 0$, $q \neq 0$, $r \neq 0$, und zwar eindeutig in den Verhältnissen

$p : q : r = 2 : 1 : (-1)$.

Daraus folgt, daß sich durch Änderung der Koeffizienten von z noch drei Gleichungssysteme bilden lassen, die der Aufgabenstellung genügen, nämlich

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2, \quad (4) \\ 8x + 5y + 4z &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + z &= 2 \quad (5) \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + \tfrac{1}{2}z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \quad (6) \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

Ferner folgt aus dem Gesagten, daß dieses die einzigen im zweiten Fall möglichen Gleichungssysteme sind.

Zur Lösung des Gleichungssystems (2) setzt man $z = t$ (beliebig reell) und erhält aus der zweiten und dritten Gleichung

$$x = \frac{1}{2} - \frac{2}{7}t \; ; \quad y = -\frac{1}{7}t \; .$$

In entsprechender Weise erhält man in den anderen Fällen:

(3) $x = \frac{1}{2} - \frac{13}{28}t \; ; \quad y = \frac{1}{7}t \; ; \quad z = t$

(4) $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \; ; \quad y = 0 \; ; \quad z = t$

(5) $x = \frac{1}{2} - \frac{2}{7}t \; ; \quad y = \frac{1}{7}t \; ; \quad z = t$

(6) $x = \frac{1}{2} - \frac{13}{28}t \; ; \quad y = \frac{1}{7}t \; ; \quad z = t$

<u>2. Lösungsweg</u> (Dieser setzt keine Vorkenntnisse über lineare Abhängigkeit voraus; er vermeidet auch die Fehlermöglichkeiten, die beim 1. Lösungsweg in der Detailausführung und - formulierung zu beachten sind. Dafür ist er nicht so "elegant", indem er "primitiver" an die Aufgabenstellung anknüpft und mehr numerische Rechnung erfordert):

Da (1) eindeutig lösbar ist, gilt dasselbe von jedem System mit gleichen linken Seiten wie (1); dies erkennt man durch Vergleich der Lösungsalgorithmen.

Also genügt es, die folgenden neun Gleichungssysteme zu betrachten:

$$(S_1):\quad \begin{aligned} a_1x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

$$(S_2):\quad \begin{aligned} 2x + a_2y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

....

$$(S_9):\quad \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + a_9z &= 4 \end{aligned}$$

(S_1) ist eindeutig lösbar für alle $a_1 \neq \frac{40}{13}$,
unlösbar für $a_1 = \frac{40}{13}$

(S_2) ist eindeutig lösbar für alle $a_2 \neq \frac{1}{2}$, hat unendlich viele Lösungen für $a_2 = -\frac{1}{2}$; siehe oben (3)

(S_3) ist eindeutig lösbar für alle $a_3 \neq \frac{1}{2}$, hat unendlich viele Lösungen für $a_3 = \frac{1}{2}$; siehe oben (6)

(S_4) ist eindeutig lösbar für alle $a_4 \neq \frac{15}{2}$, unlösbar für $a_4 = \frac{15}{2}$

(S_5) ist eindeutig lösbar für alle $a_5 \neq 6$, hat unendlich viele Lösungen für $a_5 = 6$; siehe oben (2)

(S_6) ist eindeutig lösbar für alle $a_6 \neq 1$, hat unendlich viele Lösungen für $a_6 = 1$; siehe oben (5)

(S_7) ist eindeutig lösbar für alle $a_7 \neq 6$, unlösbar für $a_7 = 6$

(S_8) ist eindeutig lösbar für alle a_8

(S_9) ist eindeutig lösbar für alle $a_9 \neq 4$, hat unendlich viele Lösungen für $a_9 = 4$; siehe oben (4)

Angabe der Lösungen wie im 1. Lösungsweg.

c) Ändert man in den Gleichungssystemen (2); (3); (4); (5) oder (6) genau eines der "absoluten Glieder", aber keinen der übrigen Koeffizienten, so erhält man ein Gleichungssystem, in dem die linken Seiten linear abhängig sind, aber die Gleichungen insgesamt nicht.
Ein solches Gleichungssystem hat keine Lösung. (Die erweiterte Koeffizientenmatrix hat einen höheren Rang als die Koeffizientenmatrix.)