A 10; I

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

1. Man beweise:
   Sind m und n natürliche Zahlen, so ist die Zahl $m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$ durch 30 teilbar.

2. Gegeben sei das Gradmaß des Neigungswinkels zwischen zwei Ebenen ε und ε_1. Gegeben sei ferner der Flächeninhalt $I(\triangle ABC)$ eines Dreiecks $\triangle ABC$, das in der Ebene ε liegt. Die Fußpunkte der Lote von A, B, C auf ε_1 bilden ein (möglicherweise ausgeartetes) Dreieck $\triangle A_1B_1C_1$. Wie groß ist dessen Flächeninhalt $I_1(\triangle A_1B_1C_1)$?

3. In einem Zirkel Junger Mathematiker wird folgende Aufgabe gestellt:
   Gegeben ist ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$. Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle PQR$ so, daß P innerer Punkt der Strecke BC, Q innerer Punkt der Strecke CA und R innerer Punkt der Strecke AB ist.
   Bei der Diskussion über diese Aufgabe werden verschiedene Meinungen geäußert:

(1) Anita glaubt, daß die Aufgabe nicht für jedes Dreieck △ ABC lösbar ist.

(2) Berthold ist der Meinung, daß es für jedes Dreieck △ ABC genau eine Lösung gibt.

(3) Claus nimmt an, für jedes Dreieck △ ABC gelte folgendes: Es gibt beliebig viele Lösungen, und alle Dreiecke △ PQR, die Lösung sind, sind einander kongruent.

(4) Dagmar meint zwar auch, für jedes Dreieck △ ABC gebe es beliebig viele Lösungen; sie behauptet dann aber weiter: Es gibt wenigstens ein Dreieck △ ABC mit der Eigenschaft, daß nicht alle Dreiecke △ PQR, die als Lösung auftreten, einander kongruent sind.

Untersuchen Sie diese Meinungen auf ihre Richtigkeit!

A 10; II

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag

__Achtung:__ Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

4. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$; wie üblich sei $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und γ das Gradmaß des Winkels $\sphericalangle ACB$. Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Flächeninhalt $2ab \cdot |\cos\gamma|$ beträgt!

5. Es sei a eine beliebig gegebene reelle Zahl. Ermitteln Sie alle reellen x, die der Gleichung

$$\sqrt{a + x} - \sqrt{\frac{a^2}{a + x}} = \sqrt{2a + x}$$

genügen!

6. Geben Sie die Gesamtanzahl aller verschiedenen ganzzahligen Lösungspaare (x,y) der Ungleichung $|x| + |y| \leq 100$ an! Dabei gelten zwei Lösungspaare (x_1, y_1), (x_2, y_2) genau dann als gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist.

30 03 34-1 . 203 . 1000/66 (E)

L 10; I

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

1. 1. Lösungsweg: Die zu untersuchende Zahl ist $z = mn \cdot (m - n) \cdot (m + n) \cdot (m^2 + n^2)$. 5 Punkte

(a) Behauptung: z ist durch 2 teilbar.

Beweis: Sind m, n nicht beide ungerade, so enthält z einen geraden Faktor, nämlich m oder n. Sind m, n beide ungerade, so enthält z den geraden Faktor m - n.

(b) Behauptung: z ist durch 3 teilbar.

Beweis: Ist eine der Zahlen m,n durch 3 teilbar, so auch z.

Lassen m,n bei Division durch 3 denselben Rest, so ist m - n, also auch z, durch 3 teilbar.

Läßt eine der Zahlen m,n bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2, so ist m + n, also auch z, durch 3 teilbar.

(c) Behauptung: z ist durch 5 teilbar.

Beweis: Ist eine der Zahlen m,n durch 5 teilbar, so auch z.

Lassen m,n bei Division durch 5 denselben Rest, so ist m - n, also auch z, durch 5 teilbar.

Läßt eine der Zahlen m,n bei Division durch 5 den Rest 1, die andere den Rest 4, so ist m + n, also auch z, durch 5 teilbar; dasselbe gilt, wenn eine der Zahlen m,n den Rest 2, die andere den Rest 3 läßt.

Läßt schließlich eine der Zahlen m,n bei Division durch 5 den Rest 1 oder 4 die andere den Rest 2 oder 3, so läßt das Quadrat der erstgenannten Zahl den Rest 1, das Quadrat der letztgenannten Zahl den Rest 4; also ist dann $m^2 + n^2$

und somit z durch 5 teilbar.

(d) Behauptung: z ist durch 30 teilbar.

Beweis: Wegen $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ und da 2, 3, 5 zu je zweien teilerfremd sind, folgt dies aus (a), (b), (c).

Durch geeignete vorbereitende Umformungen lassen sich die Teilbarkeitsuntersuchungen vereinfachen.

Beispiel:

2. Lösungsweg: Für die zu untersuchende Zahl, die z genannt sei, gilt (1) $z = n\,(m^5 - m) - m\,(n^5 - n)$.

(a) Behauptung: Ist r eine natürliche Zahl, so ist die Zahl $q = r^5 - r$ durch 30 teilbar.

Beweis: Es ist $q = r\,(r - 1)(r + 1)(r^2 + 1)$.

Wir zeigen zunächst

(α) Behauptung: q ist durch 2 und durch 3 teilbar.

Beweis hierzu: Die Zahlen $r - 1$, r, $r + 1$ sind 3 aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Daraus folgt: Eine von ihnen und somit auch q ist durch 2 teilbar; eine von ihnen und somit auch q ist durch 3 teilbar.

(β) Behauptung: q ist durch 5 teilbar.

Beweis hierzu: Ist r durch 5 teilbar, so auch q.

Läßt r bei Division durch 5 den Rest 1, so ist $r - 1$, also auch q, durch 5 teilbar.

Läßt r bei Division durch 5 den Rest 4, so ist $r + 1$, also auch q, durch 5 teilbar.

Läßt aber r den Rest 2 oder 3, so läßt r^2 den Rest 4; also ist dann $r^2 + 1$ und somit q durch 5 teilbar.

(γ) Behauptung: q ist durch 30 teilbar.

Beweis wie 1. Lösungsweg, (d).

(b) Behauptung: z ist durch 30 teilbar.
Beweis: Wendet man (a) mit $r = m$ und mit $r = n$ an, so folgt, daß beide Glieder der rechten Seite von (1), also auch z, durch 30 teilbar sind.
Jedoch auch gänzlich ohne vorbereitende Umformungen sind einfache Lösungswege möglich, z. B. mit Hilfe des Nachweises, daß das Quadrat bzw. Biquadrat jeder nicht durch 3 bzw. 5 teilbaren ganzen Zahl bei Division durch 3 bzw. 5 den Rest 1 läßt ("kleiner Fermatscher Satz" für 3 und 5).

2. Das Gradmaß des Neigungswinkels sei α genannt, der gegebene und gesuchte Flächeninhalt $I(\triangle ABC)$ bzw. $I_1(\triangle A_1B_1C_1)$. 6 Punkte

(a) Ist $\alpha = 0^\circ$, so ist $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$, also $I(\triangle ABC) = I_1(\triangle A_1B_1C_1)$.

(b) Ist $\alpha = 90^\circ$, so liegen A_1, B_1, C_1 in einer Geraden (nämlich in der Schnittgeraden von ε und ε_1), also ist $I_1(\triangle A_1B_1C_1) = 0$.

(c) Sei nun $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Ist ε_2 irgend eine zu ε_1 parallele Ebene und sind A_2, B_2, C_2 die Fußpunkte der Lote von A, B, C auf ε_2, so ist $\triangle A_2B_2C_2 \cong \triangle A_1B_1C_1$, also hat $\triangle A_2B_2C_2$ ebenfalls den gesuchten Flächeninhalt $I_1(\triangle A_1B_1C_1)$. Durch geeignete Wahl von ε_2 kann man erreichen, daß die Schnittgerade k von ε und ε_2 außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$ verläuft. (Abb. s. Seite 4).

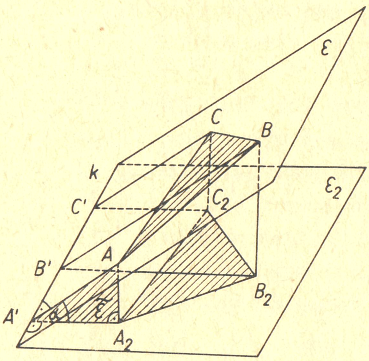

Abb. L 10; 2

Die zu k senkrechte Ebene $\tilde{\varepsilon}$ durch A steht auf ε_2 senkrecht, enthält also A_2. Ist ferner A' ihr Schnittpunkt mit k, so ist $A \neq A'$, $A \neq A_2$, $A' \neq A_2$, $g_{AA'} \perp k$ und $g_{A_2A'} \perp k$, somit

$\mu(\sphericalangle A_2A'A) = \alpha$ und

$\mu(\sphericalangle A'A_2A) = 90^\circ$,

also

$$\overline{A'A_2} = \overline{A'A} \cdot \cos\alpha \,.$$

Entsprechendes gilt für B und C.

Daraus folgt für die Flächeninhalte f, f_2 der (möglicherweise ausgearteten) Trapeze A'B'BA, $A'B'B_2A_2$ die Beziehung

$$f_2 = \overline{A'B'} \cdot \tfrac{1}{2}(\overline{A'A_2} + \overline{B'B_2}) = \overline{A'B'} \cdot \tfrac{1}{2}(\overline{A'A} + \overline{B'B}) \cdot \cos\alpha$$
$$= f \cdot \cos\alpha \,.$$

Entsprechendes gilt für die Trapeze B'C'CB, $B'C'C_2B_2$ und C'A'AC, $C'A'A_2C_2$.

Da sich nun I ($\triangle$ ABC) in der gleichen Weise vermittels Addition und Subtraktion aus den Flächeninhalten der Trapeze A'B'BA, B'C'CB, C'A'AC gewinnen läßt wie I_1 ($\triangle A_1B_1C_1$) aus den Flächeninhalten der Trapeze $A'B'B_2A_2$, $B'C'C_2B_2$, $C'A'A_2C_2$, so folgt schließlich $I_1(\triangle A_1B_1C_1) = I(\triangle ABC) \cdot \cos\alpha$.

Die Ergebnisse (a), (b), (c) lassen sich auch dahin zusammenfassen, daß $I_1(\triangle A_1B_1C_1) = I(\triangle ABC) \cdot \cos\alpha$ für jedes $(0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ)$ gilt.

3. Wie üblich sei $\mu(\sphericalangle BAC) = \alpha$, $\mu(\sphericalangle ABC) = \beta$ genannt. **9 Punkte**

(I) Angenommen, $\triangle$ PQR sei eine Lösung der Aufgabe. Dann wähle man auf der Halbgeraden h_{AB} einen Punkt $R_1 \neq A$ beliebig und ziehe die Parallelen

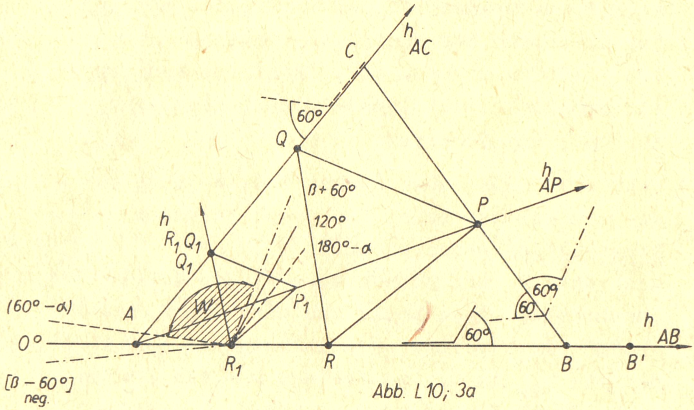

Abb. L 10; 3a

durch R_1 zu g_{RP} und zu g_{RQ}, die h_{AP} bzw. h_{AC} in P_1 bzw. in Q_1 schneiden. Es folgt

$$\overline{AP_1} : \overline{AP} = \overline{AR_1} : \overline{AR}$$
$$= \overline{AQ_1} : \overline{A_Q},$$

also

$g_{P_1Q_1} \parallel g_{PQ}$; daher ist auch $\triangle P_1Q_1R_1$ gleichseitig.

Ferner gilt

$$(1)\quad \begin{cases} 0^\circ < \mu(\sphericalangle ARQ), & 0^\circ < \mu(\sphericalangle BRP) = 120^\circ - \mu(\sphericalangle ARQ); \\ 0^\circ < \mu(\sphericalangle CQP) = \mu(\sphericalangle ARQ) + \alpha - 60^\circ, & 0^\circ < \mu(\sphericalangle AQR) = 180^\circ - \alpha - \mu(\sphericalangle ARQ); \\ 0^\circ < \mu(\sphericalangle BPR) = \mu(\sphericalangle ARQ) + 60^\circ - \beta, & 0^\circ < \mu(\sphericalangle CPQ) = \beta + (120^\circ - \mu(\sphericalangle ARQ)) - 60^\circ \end{cases}$$

woraus der Reihe nach

$$(2)\quad \begin{cases} 0^\circ < \mu(\sphericalangle ARQ) < 120^\circ; \\ 60^\circ - \alpha < \mu(\sphericalangle ARQ) < 180^\circ - \alpha; \\ \beta - 60^\circ < \mu(\sphericalangle ARQ) < \beta + 60^\circ \end{cases}$$

folgt.

Trägt man daher die nichtnegativen unter den Winkeln vom Gradmaß 0°, $60^\circ - \alpha$, $\beta - 60^\circ$; 120°, $180^\circ - \alpha$, $\beta + 60^\circ$ an h_{R_1A} an (und zwar nach derjenigen Seite hin, auf der C liegt), so liegt $h_{R_1Q_1}$ in dem Winkelraum W zwischen den zuletzt gezeichneten Schenkeln des größten der Winkel vom Gradmaß 0°, $60^\circ - \alpha$, $\beta - 60^\circ$ und des kleinsten der Winkel vom Gradmaß 120°, $180^\circ - \alpha$, $\beta + 60^\circ$. (Einfache Konstruktionsmöglichkeiten dieser Winkel sind in der Abb. angedeutet.)

(II) Wenn ein $\triangle$ PQR daher Lösung ist, so kann es nur ein solches sein, das durch folgende <u>Konstruktion</u> erhalten wird:
Man wähle R_1 und konstruiere W, wie in (I) beschrieben. Dann wähle man eine von R_1 ausgehende in W verlaufende Halbgerade. Schneidet sie h_{AC} in Q_1, so schlage man die Kreise um R_1 durch Q_1 und um Q_1 durch R_1. Derjenige ihrer Schnittpunkte, der nicht mit A in derselben durch $g_{R_1Q_1}$ bestimmten Halbebene liegt, sei P_1. Dann bringe man g_{AP_1} und g_{BC} zum Schnitt P und ziehe die Parallelen durch P zu $g_{P_1R_1}$ und zu $g_{P_1Q_1}$, die g_{AB} bzw. g_{AC} in R bzw. in Q schneiden.

(III) <u>Beweis:</u> daß (II) auf eine Lösung führt:
Nach Konstruktion ist $\triangle\ P_1Q_1R_1$ gleichseitig; ferner ist
$g_{PQ} \parallel g_{P_1Q_1}$, $g_{PR} \parallel g_{P_1R_1}$, woraus
$\overline{AQ} : \overline{AQ_1} = \overline{AP} : \overline{AP_1} = \overline{AR} : \overline{AR_1}$, also
$g_{QR} \parallel g_{Q_1R_1}$ folgt, so daß auch $\triangle$ PQR gleichseitig ist.
Nach Konstruktion liegt auch P auf g_{BC}, Q auf g_{CA}, R auf g_{AB}.

Schließlich gilt (2); hieraus folgt (1)(*), und daraus ergibt sich, daß P, Q, R sogar innere Punkte der Strecken BC bzw. CA bzw. AB sind.

(IV) <u>Untersuchung von Existenz, Anzahl und Kongruenz der Lösungen:</u>
Für jedes Dreieck △ ABC gelten die 9 Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{r} 0^\circ \\ 60^\circ - \alpha \\ \beta - 60^\circ \end{array}\right\} < \left\{\begin{array}{l} 120^\circ \\ 180^\circ - \alpha \\ \beta + 60^\circ . \end{array}\right.$$

Daraus folgt, daß W der Winkelraum eines (positiven) Winkels ist. Also gibt es beliebig viele Möglichkeiten zur Wahl der Richtung von $h_{R_1Q_1}$. Die weitere Konstruktion (II) ist dann stets (sogar eindeutig) ausführbar, da wieder aus (2) bzw. (1) folgt, daß keines der Geradenpaare, die gemäß (II) zum Schnitt zu bringen sind, ein Parallelenpaar ist. Die entstehenden Dreiecke △ PQR sind auch paarweise verschieden, da ihre Seiten RQ paarweise verschiedene Richtungen haben.
Um zu zeigen, daß auch inkongruente Dreiecke △ PQR auftreten können, genügt ein Beispiel:

(*) Anmerkung: An dieser Stelle des Beweises muß man (1) teilweise anders formulieren. Solange man z.B. noch nicht aus der 5. Ungleichung von (1) geschlossen hat, daß B nicht zwischen A und R liegt, hat man die 2. Ungleichung von (1) in der Form $0^\circ < \mu$ ($\sphericalangle$ B'RP) zu schreiben mit einem auf r gelegenen Punkt B', für den R zwischen A und B' liegt. (Überhaupt dürften die an (1), (2) anschließenden Überlegungen z. T. das von Schülern zu fordernde Maß überschreiten; sie dienen hauptsächlich der Orientierung der Korrigierenden.)

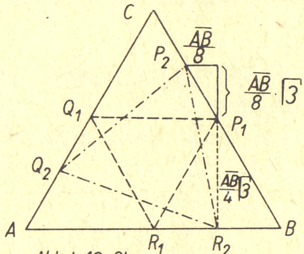

Abb. L 10; 3b

Man zeichne $\triangle$ ABC gleichseitig und wähle der Reihe nach

P_1, Q_1, R_1; P_2, Q_2, R_2

als Mittelpunkt von

BC, CA, AB; P_1C, Q_1A, R_1B.

Dann wird

$$\overline{Q_1R_1} = \overline{R_1P_1} = \overline{P_1Q_1} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$$

und

$$\overline{Q_2R_2} = \overline{R_2P_2} = \overline{P_2Q_2} = \overline{AB}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\cdot\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{4}\,\overline{AB}\cdot\sqrt{7}.$$

Die Meinung von Dagmar ist daher richtig; die anderen sind falsch.

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

4. Man schlage den Kreis um B durch C; er schneidet g_{BC} in C und einem zweiten Punkt D. Ferner schlage man den Kreis um den Mittelpunkt von AC durch C; er schneidet g_{BC} in C und einem Punkt P. Unter den drei Punkten C,P,D wähle man diejenigen beiden aus, zwischen denen der dritte liegt, schlage über der von ihnen gebildeten Strecke einen Halbkreis und bringe ihn zum Schnitt X mit der im dritten Punkt auf g_{BC} errichteten Senkrechten. (In den Fällen P = C und P = D setze man stattdessen sinngemäß X = C bzw. X = D). Dann hat das über CX errichtete Quadrat den geforderten Flächeninhalt (im Falle P = C = X ist es zum Punkt entartet). 5 Punkte

Beweis: Es wird $\overline{CP} = b \cdot |\cos\gamma|$ und

$\overline{CX}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CP} = 2\,a \cdot b \cdot |\cos\gamma|$.

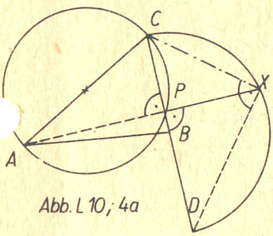

Abb. L 10; 4a

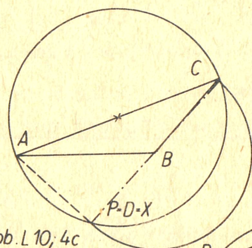

Abb. L 10; 4c

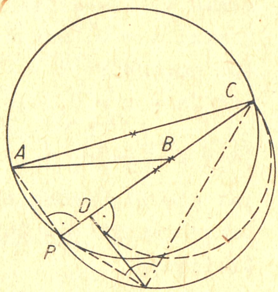

Abb. L 10; 4a

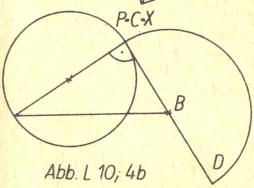

Abb. L 10; 4b

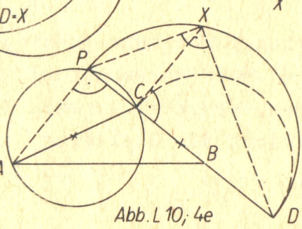

Abb. L 10; 4e

30 03 34-1 . 203 . 1000/66 (E)

5. <u>1. Fall: $a > 0$.</u> Angenommen, es gebe eine reelle Zahl x, die der Gleichung genügt. Dann folgt 8 Punkte
$a + x - a = \sqrt{(2a + x)(a + x)}$, hieraus
$x \geqq 0$ und $x^2 = 2a^2 + 3ax + x^2$, also
$x = -\frac{2}{3}a < 0$. Dieser Widerspruch zeigt:
Es gibt <u>keine reelle Zahl</u> x, die der Gleichung genügt *).

<u>2. Fall: $a = 0$.</u> Angenommen, es gebe eine reelle Zahl x, die der Gleichung genügt. Dann folgt, da
$\sqrt{0 + x}$ und
$\frac{0^2}{0 + x}$ existieren, $x > 0$.
Ist umgekehrt x irgend eine positive reelle Zahl,

so gilt $\sqrt{0 + x} - \sqrt{\frac{0^2}{0 + x}} = \sqrt{x} = \sqrt{2 \cdot 0 + x}$,

d.h., so ist die Gleichung erfüllt. Daher genügen <u>alle positiven reellen x und nur diese</u> der Gleichung.

<u>3. Fall: $a < 0$.</u> Angenommen, es gebe eine reelle Zahl x, die der Gleichung genügt. Dann folgt
$a+x+a = \sqrt{(2a+x)(a+x)}$; $(2a+x)^2 = (2a+x)(a+x)$;
$(2a+x)\,a = 0$, wegen $a \neq 0$ also $x = -2a$.
Ist umgekehrt $x = -2a$, so ist $a + x = -a > 0$ und $2a + x = 0$, also gilt

$\sqrt{a + x} - \sqrt{\frac{a^2}{a + x}} = \sqrt{-a} - \sqrt{-a} = 0 = \sqrt{2a+x}$, d.h., so

ist die Gleichung erfüllt.
Daher genügt <u>die Zahl $x = -2a$ und nur diese</u> der Gleichung.

*) Bemerkung: Man kann dies (ohne den Schluß auf $x \geqq 0$) auch so erhalten:
Angenommen, es gebe ... Dann folgt $x = -\frac{2}{3}a$. Dies erfüllt nicht die Gleichung, also gibt es kein x.

6. 1.) Die Menge $\mathfrak{M}$ aller ganzzahligen Lösungspaare (x, y) mit $x > 0$, $y > 0$ ergibt sich durch folgende Aufzählung: 7 Punkte

99 Paare: $x = 1$; $y = 1, \ldots, 99$,
98 Paare: $x = 2$; $y = 1, \ldots, 98$,
....
2 Paare: $x = 98$, $y = 1, 2$,
1 Paar: $x = 99$, $y = 1$.

Die Anzahl dieser Paare ist

$$1 + 2 + \ldots + 98 + 99 = \frac{1}{2} \cdot 99 \cdot 100.$$

2.) Die Mengen $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$ aller ganzzahligen Lösungspaare (x,y) mit $x < 0$, $y > 0$ bzw. $x > 0$, $y < 0$ bzw. $x < 0$, $y < 0$ können jeweils eindeutig auf $\mathfrak{M}$ abgebildet werden, indem man je ein Paar (a,b) aus $\mathfrak{M}$ dem Paar (- a,b) bzw. (a, - b) bzw. (- a, - b) zuordnet.

3.) Die Menge $\mathfrak{N}$ aller ganzzahligen Lösungspaare (x,y) mit $x = 0$, $y > 0$ enthält genau 100 Paare: $x = 0$; $y = 1, \ldots, 100$.

4.) Die Mengen $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'''$ aller ganzzahligen Lösungspaare (x,y) mit $x = 0$, $y < 0$ bzw. $x > 0$, $y = 0$ bzw. $x < 0$, $y = 0$ können jeweils eineindeutig auf $\mathfrak{N}$ abgebildet werden, indem man je ein Paar (0,c) aus $\mathfrak{N}$ dem Paar (0,-c) bzw. (c,0) bzw. (-c,0) zuordnet.

5.) Die Menge $\mathfrak{P}$ aller ganzzahligen Lösungspaare (x,y) mit $x = 0$, $y = 0$ enthält genau 1 Paar: $x = 0$, $y = 0$.

6.) Die Mengen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'''$, $\mathfrak{P}$ sind zu je zweien elementfremd; ihre Vereinigungsmenge ist die Menge aller ganzzahligen Lösungspaare; deren Anzahl beträgt somit

$$2 \cdot 99 \cdot 100 + 4 \cdot 100 + 1 = 20201.$$