A 10;I

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag

__Achtung:__ Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

1. Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels ABCDEFGH (Abb. 10;1).
Ermitteln Sie die Abstände der Eckpunkte A, B, C, G, H, E von der Diagonalen DF!

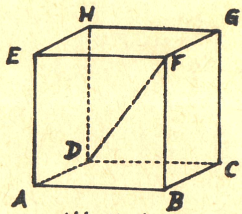


Abb. 10;1

2. Zeigen Sie, daß für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c stets

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \quad \text{gilt !}$$

3. Von sechs Orten A, B, C, D, E und F sind folgende Entfernungen voneinander (in km) bekannt:
$\overline{AB} = 30$, $\overline{AE} = 63$, $\overline{AF} = 50$, $\overline{BF} = 40$, $\overline{CD} = 49$, $\overline{CE} = 200$, $\overline{DF} = 38$.
Welche Entfernung haben B und D voneinander?

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

A 10/II

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag

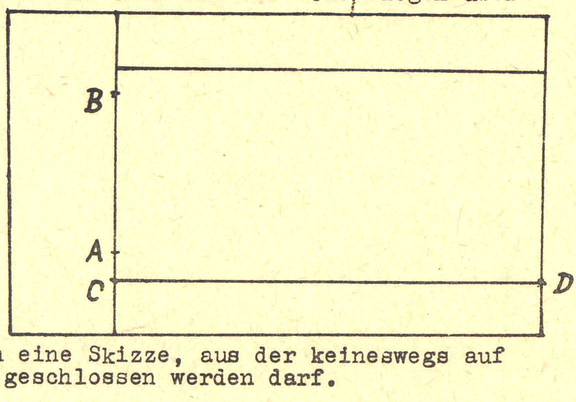
Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

4. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k, für die die Gleichung $x^2 + x + 3 = k(x^2 + 5)$ eine in x quadratische Gleichung ist, die
   a) eine Doppellösung hat!
   b) zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen hat!

5. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen!
$$\frac{1}{2} \lg (2x - 1) + \lg \sqrt{x - 9} > 1$$

6. Die Abbildung 10;6 stellt den Grundriß eines Teiles eines Theaterraumes dar. AB ist die Bühnenbreite, CD die Flucht der Seitenlogen.
   Es sind alle Punkte P auf CD zu ermitteln, von denen aus die Bühne unter dem größten Sehwinkel erscheint!
   Unter dem Sehwinkel ist hier der Winkel $\measuredangle$ APB zu verstehen.
   Man setze gleiche Höhe der Bühne und der Seitenlogen über dem Erdboden voraus.

Abb. 10;6



Anmerkung:
Abb. 10;6 ist lediglich eine Skizze, aus der keineswegs auf die Größenverhältnisse geschlossen werden darf.

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1. Die gesuchten Abstände sind sämtlich einander gleich, nämlich gleich der Länge der in einem Dreieck mit den Seiten von der Länge a, $a\cdot\sqrt{2}$, $a\cdot\sqrt{3}$ auf der letztgenannten Seite errichteten Höhe. — 6 Punkte

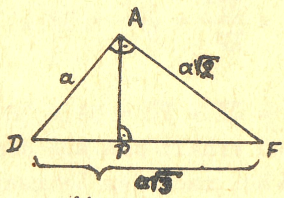


Abb. L 10;1

Wir betrachten ein solches Dreieck, etwa Δ ADF.
Es ist bei A rechtwinklig, da AD auf der Ebene ε_{ABEF} senkrecht steht. Die gesuchte Länge der Höhe AP ist daher, wie aus $\Delta ADP \sim \Delta DFA$ folgt,

$$h = \frac{a \cdot a\cdot\sqrt{2}}{a\cdot\sqrt{3}} = \frac{a}{3}\cdot\sqrt{6}\,.$$

2. Wegen $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ gilt — 6 Punkte

$$a\,(b-c)^2 + b\,(a-c)^2 + c\,(a-b)^2 \geq 0, \text{ d.h.}$$

$$ab^2 + ac^2 + a^2b + bc^2 + a^2c + b^2c - 6\,abc \geq 0.$$

Nach Addition von 9 abc erhält man

$$(bc + ac + ab)\,(a + b + c) \geq 9\,abc.$$

Durch Multiplikation mit der positiven Zahl

$\frac{1}{abc\,(a+b+c)}$ folgt die Behauptung.

3. Es ist $\overline{EA} + \overline{AF} + \overline{FD} + \overline{DC} = 63 + 50 + 38 + 49 = 200 = \overline{EC}$. — 6 Punkte

Daraus folgt, daß die Orte E, A, F, D, C in dieser Reihenfolge auf ein und derselben Geraden liegen.
A, B, F sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel $\sphericalangle$ ABF.

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

Dies folgt wegen $\overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2 = \overline{AF}^2$ aus der Umkehrung des Lehrsatzes des Pythagoras.
Es sei Q der Fußpunkt des Lotes von B auf $\overline{AF}$.
Wegen $\Delta BFQ \sim \Delta AFB$ ist dann

$$\overline{BQ} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BF}}{\overline{AF}} = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24$$

und

$$\overline{QF} = \frac{\overline{BF}^2}{\overline{AF}} = \frac{40^2}{50} = 32 .$$

Also ist

$$\overline{QD} = \overline{QF} + \overline{FD} = 32 + 38 = 70.$$

Schließlich erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ΔBQD nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$\overline{BD}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{QD}^2 = 24^2 + 70^2 = 4\,(12^2 + 35^2) =$$
$$= 4 \cdot 37^2 = 74^2$$

und damit

$$\overline{BD} = 74 .$$

Die Entfernung von B nach D beträgt also 74 km.

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 – 2. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

4. Die gegebene Gleichung ist genau dann in x quadratisch, wenn $k \neq 1$ ist. Sie ist dann äquivalent mit der Gleichung — 7 Punkte

(1) $x^2 + \frac{1}{1-k}x + \frac{3-5k}{1-k} = 0.$

Diese hat genau dann reelle Lösungen, wenn die folgenden Radikanden nicht negativ sind, und zwar die Lösungen

$$x_{1;2} = \frac{1}{2(k-1)} \pm \sqrt{\frac{1}{4(1-k)^2} - \frac{3-5k}{1-k}}$$

$$= \frac{1}{2(k-1)} \pm \sqrt{\frac{1-4(3-5k)(1-k)}{4(1-k)^2}}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{-20k^2+32k-11}}{2(k-1)} \quad +)$$

a) Die Gleichung (1) hat genau dann eine Doppellösung, wenn

$-20k^2 + 32k - 11 = 0$ das heißt

$k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} = 0$ ist.

Das ist für $k = \frac{11}{10}$ und für $k = \frac{1}{2}$ und nur für diese k der Fall.

b) Für $k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} < 0$, $k \neq 1$, hat (1) zwei voneinander verschiedene reelle Wurzeln. Das ist der Fall für $\frac{1}{2} < k < 1$ und $1 < k < \frac{11}{10}$ und nur für diese k.

+) NB: Damit die letzte Gleichung richtig ist, hat man in ihr das Doppelvorzeichen passend zu wählen.

5. Nach der Definition der Wurzel und des Logarithmus existiert die linke Seite der gegebenen Ungleichung genau dann, wenn $x - 9 > 0$ und — 7 Punkte

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

$2x - 1 > 0$ gilt.

Dies ist genau für $x > 9$ der Fall.

Die gegebene Ungleichung ist dann äquivalent mit folgenden Ungleichungen

$$\frac{1}{2} \lg (2x - 1) + \frac{1}{2} \lg (x - 9) > 1$$

$$\lg (2x - 1) (x - 9) > 2$$

$$\lg (2x^2 - 19x + 9) > \lg 100.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn

$$(2x^2 - 19x + 9) > 100$$

d.h. $2x^2 - 19x - 91 > 0$

oder $x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{91}{2} > 0$ gilt.

Wegen $(x - 13)(x + \frac{7}{2}) = x^2 - \frac{19}{2} x - \frac{91}{2}$ ist

die letzte Ungleichung äquivalent mit

(1) $(x - 13)(x + \frac{7}{2}) > 0$.

Da ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann positiv ist, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind, ist (1) genau dann erfüllt, wenn

entweder (2) $x - 13 > 0$ und $x + \frac{7}{2} > 0$

oder (3) $x - 13 < 0$ und $x + \frac{7}{2} < 0$.

Aus (2) folgt $x > 13$ und umgekehrt; aus (3) folgt $x < -\frac{7}{2}$ und umgekehrt.

Davon ist wegen $x - 9 > 0$ nur $x > 13$ Lösung der gegebenen Ungleichung; diese ist somit für alle reellen Zahlen $x > 13$ und nur für diese erfüllt.

6. Alle Winkel $\sphericalangle APB$ mit P auf CD können als Peripheriewinkel über der Sehne AB aufgefaßt werden. Die Mittelpunkte H_1 der entsprechenden Kreise liegen auf der Mittelsenkrechten m von AB. Da jeder Peripheriewinkel halb so groß ist wie der zugehörige Zentriwinkel, ist der Punkt H auf m zu finden, der 8 Punkte

(1) Mittelpunkt eines durch A und B gehenden und

CD schneidenden oder berührenden Kreises ist
und der

(2) den unter diesen Umständen größten Zentriwinkel $\sphericalangle$ AHB ergibt.

Der Winkel $\sphericalangle$ AHB ist um so größer, je kleiner die Länge r des Radius des CD berührenden oder schneidenden Kreises um H durch A und B ist. Wegen $r \geqq \overline{CM}$ (M sei der Mittelpunkt von AB) ist $\sphericalangle$ AHB genau dann am größten, wenn $r = \overline{CM}$ ist und wenn der zugehörige Kreis die Strecke CD berührt. In diesem Falle ist der gesuchte Punkt P der Berührungspunkt (Abb. L 10;6a). Berührt dieser Kreis aber die CD enthaltende Gerade außerhalb der Strecke CD, so ist r am kleinsten und damit $\sphericalangle$ AHB am größten, wenn H Mittelpunkt des Kreises durch A,B,D ist. In diesem ist P = D (Abb. L 10;6b). In beiden Fällen ist P eindeutig bestimmt.

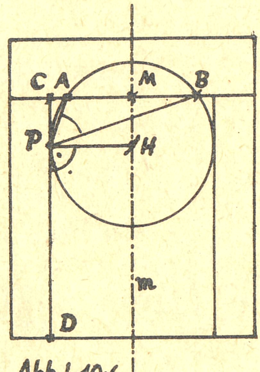


Abb. L 10;6a

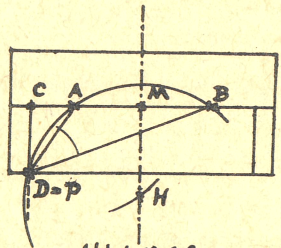


Abb. L 10;6b