VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 10

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

1. Man ermittle alle reellen Zahlen a, für die eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{15}{4} x + a = 0$$

das Quadrat der anderen Wurzel ist!

2. Es sei $\frac{p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch (p, q ganzzahlig und $q \neq 0$).
Man beweise, daß dann auch $\frac{q-p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch ist!

3. Auf einem (ebenen) Zeichenblatt sind ein Punkt A und zwei nicht parallele Geraden g_1, g_2 gegeben, die nicht durch A gehen und deren Schnittpunkt S außerhalb des Zeichenblattes liegt.
Konstruieren Sie die Verbindungsgerade durch A und S, so daß die gesamte Konstruktion auf dem Zeichenblatt erfolgt!

30 02 23-1 1000/66 (E)

4. Verbindet man bei einem Würfel die Mittelpunkte der Seitenflächen gradlinig miteinander, so erhält man die Kanten eines dem Würfel einbeschriebenen Oktaeders. Verfährt man in entsprechender Weise bei einem Oktaeder, so erhält man die Kanten eines Würfels.

   a) Wie verhalten sich die Volumina von Würfel und einbeschriebenem Oktaeder zueinander?

   b) Wie ist das Verhältnis der Volumina bei Oktaeder und einbeschriebenem Würfel?

   c) Wie verhalten sich im ersten Fall die Inhalte der Oberflächen zueinander?

   d) Wie ist das Verhältnis der Inhalte der Oberflächen im zweiten Fall?

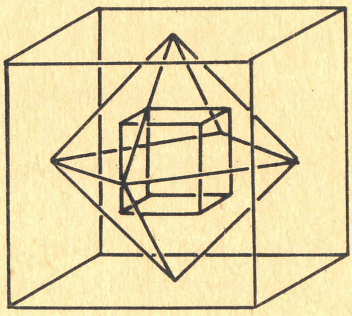

Abb. 10,4

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung seien w und w^2. 9 Punkte

Dann gilt nach den Vietaschen Wurzelsätzen:

(1) $w^2 + w = \frac{15}{4}$ und (2) $w^2 \cdot w = a$.

Aus (1) folgt

$$w_1 = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad w_2 = -\frac{5}{2} .$$

Wegen (2) ist

$$a_1 = w_1^3 = \frac{27}{8} \quad \text{und} \quad a_2 = w_2^3 = -\frac{125}{8} .$$

Durch Einsetzen findet man, daß die ermittelten Werte tatsächlich den Bedingungen genügen:

$x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{27}{8} = 0$ hat die Wurzeln $x_1 = \frac{9}{4}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$

$x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{125}{8} = 0$ hat die Wurzeln $x_1 = \frac{25}{4}$ und $x_2 = -\frac{5}{2}$

Die gestellte Bedingung wird von

$a_1 = \frac{27}{8}$ und $a_2 = -\frac{125}{8}$

und nur von diesen erfüllt.

2. **Beweis:** (indirekt) 7 Punkte

Angenommen, $\frac{q-p}{q}$ wäre durch c kürzbar

(c ganz, $c \neq 0 \pm 1$), dann müßte gelten

$q - p = c \cdot m$ (m ganzzahlig) und

$q = c \cdot n$ (n ganzzahlig).

Daraus würde folgen

$p = c(n - m)$.

Dann wären jedoch p und q durch c teilbar, was der Voraussetzung widerspricht.

3. Analyse: Angenommen, ein Punkt A' ($\neq$ A) des Zeichenblattes liege auf AS. Man wähle B auf g_1, C auf g_2 so, daß A, B, C nicht in einer Geraden liegen. Die Parallelen durch A' zu AB bzw. AC schneiden g_1 bzw. g_2 in B' bzw. C'. Dann ist nach dem Strahlensatz 12 Punkte

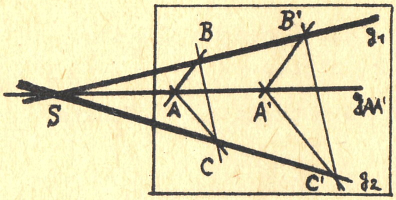

Abb. L 10,3

$\overline{SB} : \overline{SB'} = \overline{SA} : \overline{SA'} = \overline{SC} : \overline{SC'}$, also nach einer Umkehrung des Strahlensatzes BC $\parallel$ B'C'. Daher kann die gesuchte Gerade nur diejenige sein, die sich durch folgende Konstruktion ergibt: Man wähle B auf g_1, C auf g_2 so, daß A, B, C nicht in einer Geraden liegen, und zeichne eine beliebige (von BC verschiedene) Parallele zu BC. Sie schneide g_1 in B', g_2 in C'. Die Parallelen durch B' bzw. C' zu BA bzw. CA schneiden sich dann in einem Punkt A', und $g_{AA'}$ ist die gesuchte Gerade.

Beweis: Nach Konstruktion ist

$\overline{SC} : \overline{SC'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$ (Strahlensatz)

$= \overline{AC} : \overline{A'C'}$ (da $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$),

nach einer Umkehrung des Strahlensatzes geht also $g_{AA'}$ durch S.

Diskussion: Da BC nicht zu g_2 oder g_1 parallel ist, gilt dasselbe für die gezeichnete Parallele, also sind B', C' eindeutig bestimmt. Da BA, CA nicht parallel sind, gilt dasselbe für ihre Parallelen durch B' bzw. C', also ist auch A' eindeutig bestimmt. (Genauer: A', B', C' ergeben sich eindeutig aus dem jeweils vorangegangenen Teil der Konstruktion, der allerdings die Willkür der Wahlen von B, C, B', C' enthielt.) Da schließlich die Parallele zu BC von BC verschieden gezeichnet war, ist $B' \neq B$; $C' \neq C$; also wird auch $A' \neq A$. Somit ist auch der letzte Konstruktionsschritt eindeutig ausführbar. (Die willkürliche Wahl von B, C kann im Endergebnis keinen Einfluß auf die Lage der Geraden $g_{AA'}$ haben; denn nach dem Beweis ist diese mit der Geraden g_{AS} identisch, also schon durch A, g_1, g_2 eindeutig bestimmt.) - Endlich kann durch geeignete Wahl von B, C und der Parallelen zu BC stets erreicht werden, daß B, C, B', C', A' auf dem Zeichenblatt liegen.+)

4. Für das Volumen des Würfels mit der Kantenlänge a gilt: $V_w = a^3$. 12 Punkte

Für den Inhalt der Oberfläche des Würfels mit der Kantenlänge a gilt: $O_w = 6a^2$.

Für das Volumen des Oktaeders mit der Kantenlänge b gilt: $V_o = \frac{1}{3} b^3 \cdot \sqrt{2}$.

Für den Inhalt der Oberfläche des Oktaeders mit der Kantenlänge b gilt: $O_o = 2 b^2 \cdot \sqrt{3}$.
Das Oktaeder setzt sich aus einer vierseitigen Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche des Inhalts b^2 und deren Spiegelbild an der Grundfläche zusammen. Die Höhe ist die halbe Diagonale des Quadrates, also $\frac{b}{2} \cdot \sqrt{2}$. Die Oberfläche besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken

+) Auf einen exakten Beweis hierzu, mit Hilfe der Voraussetzung, daß A, B, C innere Punkte des konvexen Zeichenblattes sind, muß hier natürlich verzichtet werden.

mit der Grundseite b. Deren Höhe ist $\frac{b}{2} \cdot \sqrt{3}$. Damit ist der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke

$$\frac{b^2}{4} \cdot \sqrt{3}.)$$

a) Die Länge der Würfelkante sei a. Dann gilt für die Länge der Oktaederkante b

$$b = \frac{1}{2}\, a \cdot \sqrt{2} \qquad \text{(Pythagoras)}$$

Daher ist

$V_w = a^3$ und $V_o = \frac{1}{3}\sqrt{2}\,(\frac{1}{2}\, a\sqrt{2})^3 = \frac{1}{6}\, a^3$

und mithin

$V_w : V_o = 6 : 1$.

b) Die Länge der Oktaederkante sei b. Die Mittelpunkte S der gleichseitigen Dreiecke liegen auf den Seitenhalbierenden. Diese werden von S im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Eine parallele Strecke zu b durch S hat die Länge $\frac{2}{3}$ b . Der Schnitt einer Ebene, in der eine Seitenfläche des einbeschriebenen Würfels liegt, mit dem Oktaeder ist also ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{2}{3}$ b . Die Länge der Quadratseite a ergibt sich aus

$a^2 = (\frac{1}{3}\, b)^2 + (\frac{1}{3}\, b)^2 = 2 \cdot (\frac{1}{3}\, b)^2$

also

$a = \frac{1}{3}\, b \cdot \sqrt{2}$. Daher gilt:

$V_o = \frac{1}{3}\, b^3 \sqrt{2}$ und $V_w = (\frac{1}{3}\, b \cdot \sqrt{2})^3 = \frac{2}{27}\, b^3 \cdot \sqrt{2}$

und mithin

$V_o : V_w = 9 : 2$.

c) Es ist $O_w = 6\, a^2$ und $O_o = 2\, (\frac{1}{2}\, a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}$

$= a^2 \cdot \sqrt{3}$.

Daher ist

$O_w : O_o = 6 : \sqrt{3} = 6\sqrt{3} : 3 = 2\sqrt{3} : 1$.

d) Es ist

$O_o = 2\ b^2 \cdot \sqrt{3}$ und $O_w = 6\ (\frac{1}{3}\ b \cdot \sqrt{2})^2 = \frac{4}{3}\ b^2$.

Daher ist

$O_o : O_w = 3 \cdot \sqrt{3} : 2$.

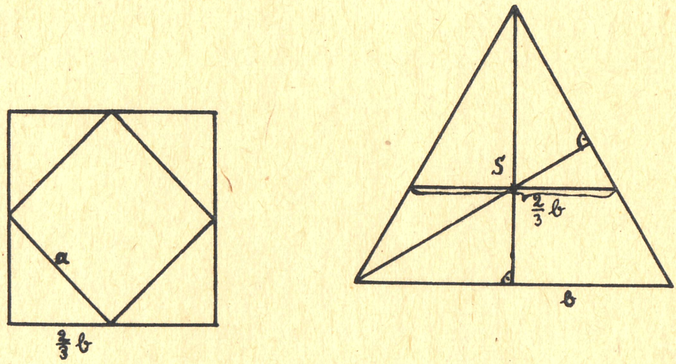

Abb. L 10;4