A 9, I

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 9 - 1. Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

1. Zwei Primzahlen p_1 und p_2 (mit $p_1 > p_2$) heißen Primzahlzwillinge, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt.
   Beweisen Sie, daß für alle Primzahlzwillinge p_1 und p_2, für die $p_2 > 3$ ist, stets die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist !

2. Beweisen Sie die folgende Behauptung !
   Sind bei einem (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeder ABCD die Umfänge aller seiner vier Seitenflächen untereinander gleich, dann sind diese Flächen zueinander kongruent.

3. Beweisen Sie die folgende Behauptung !
   In keinem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse kleiner als das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fache der Summe der Kathetenlängen.

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

A 9;II

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

4. Zeigen Sie, daß es unter allen Zahlen der Form $2p + 1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt!

5. Auf dem Kreis k bewegen sich der Punkt A mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_1 und der Punkt B mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_2, wobei $v_1 \neq v_2$ ist. Bewegen sich beide Punkte im gleichen Umlaufsinn (etwa im Uhrzeigersinn), so überholt der Punkt A den Punkt B jeweils nach 56 min. Bewegen sich beide Punkte in verschiedenem Umlaufsinn, so begegnen sie einander jeweils nach 8 min. Dabei verringert bzw. vergrößert sich ihr auf der Kreislinie gemessener Abstand voneinander in je 24 s um 14 m.
   a) Wie lang ist der Kreisumfang?
   b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (in m/min)?

6. In einer Ebene sind ein Kreis k, eine Gerade g sowie ein Punkt A auf g gegeben.
   Man konstruiere einen Kreis k', der erstens k berührt und zweitens g in A berührt! Man untersuche, wieviele solcher Kreise k' es bei den verschiedenen Lagemöglichkeiten von k, g und A geben kann!

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9 - 1. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1. Laut Aufgabe gilt $p_1 = p_2 + 2$. 5 Punkte

Also gilt

$p_1 + p_2 = p_2 + 2 + p_2 = 2\,p_2 + 2 = 2\,(p_2 + 1)$.

Da jede Primzahl > 3 eine ungerade Zahl ist, ist $p_2 + 1$ gerade und $p_1 + p_2$ mithin durch 4 teilbar. Ferner sind p_2, $p_2 + 1$ und $p_2 + 2$ $(= p_1)$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen somit genau eine durch 3 teilbar ist. Da aber p_1 und p_2 Primzahlen größer als 3 sind, sind diese beiden Zahlen nicht durch 3 teilbar. Also ist $p_2 + 1$ durch 3 teilbar und damit $p_1 + p_2 = 2\,(p_2 + 1)$ durch 12 teilbar. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Es seien $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = x$, $\overline{BD} = y$, $\overline{CD} = z$ die Längen der Tetraederkanten. Dann gilt laut Aufgabe, wenn man den Umfang mit u bezeichnet: 6 Punkte

(1) $a + b + c = u$ ($\triangle$ ABC)

(2) $a + y + z = u$ ($\triangle$ DCB)

(3) $x + b + z = u$ ($\triangle$ CDA)

(4) $x + y + c = u$ ($\triangle$ BAD).

Nach Addition dieser vier Gleichungen erhält man:

(5) $a + b + c + x + y + z = 2\,u$.

Addiert man nun (1) und (2) und subtrahiert (5), so erhält man $a = x$. Entsprechend folgt aus (1), (3) und (5) $b = y$ und aus (1), (4) und (5) $c = z$. Da die vier Dreiecke $\triangle$ ABC, $\triangle$ DCB, $\triangle$ CDA und $\triangle$ BAD mithin in ihren Seiten übereinstimmen, sind sie untereinander kongruent.

3. Für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck seien die Kathetenlängen mit a,b bezeichnet, die Hypotenusenlänge mit c. Dann ist $(a - b)^2$ als Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ, also gilt 7 Punkte

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(a + b)^2 + \frac{1}{2}(a - b)^2 \geqq \frac{1}{2}(a + b)^2.$$

Wegen $c > 0$ und $a + b > 0$ folgt hieraus die Behauptung

$$c \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b).$$

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

4. Angenommen, p sei eine Primzahl, für die $2p + 1$ Kubikzahl ist. Dann gilt $2p + 1 = z^3$, wobei z eine natürliche Zahl ist. Da $2p + 1$ ungerade ist, ist auch z ungerade. Es gilt daher $z = 2n + 1$ (n eine nicht negative ganze Zahl). — 5 Punkte

Also gilt
$$2p + 1 = (2n + 1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$$
und damit
$$2p = 2n\,(4n^2 + 6n + 3)$$
und
$$p = n\,(4n^2 + 6n + 3).$$
Da p Primzahl ist und der Faktor $4n^2 + 6n + 3$ eine natürliche Zahl größer als 2 ist, folgt für den anderen Faktor $n = 1$.
Für $n = 1$ ist
$p = 1 \cdot (4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 3) = 13$ Primzahl und
$2 \cdot 13 + 1 = 27$ tatsächlich Kubikzahl. Die einzige Primzahl p, für die $2p + 1$ Kubikzahl ist, ist daher die Zahl 13.

5. a) Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt — 7 Punkte
$v_1 > v_2$.
Bei der Bewegung in verschiedenem Umlaufsinn erhält man die relative Geschwindigkeit von B bezüglich A durch Addition ihrer Geschwindigkeiten. Laut Aufgabe werden bei dieser relativen Geschwindigkeit jeweils 14 m in 24 s zurückgelegt, in 8 min also
$$\frac{14 \cdot 60 \cdot 8}{24}\ \mathrm{m} = 280\ \mathrm{m}.$$
Das ist die Länge des Kreisumfangs.

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

b) Nach dem Gesagten ist

$$v_1 + v_2 = \frac{14}{24}\,\frac{m}{s} = 35\,\frac{m}{min}\,.$$

Bewegen sich die Punkte aber in gleichem Umlaufsinn, so erhält man die relative Geschwindigkeit von B bezüglich A durch Subtraktion der kleineren Geschwindigkeit v_2 von v_1. Laut Aufgabe und nach dem Ergebnis a) ist somit

$$v_1 - v_2 = \frac{28o}{56}\,\frac{m}{min} = 5\,\frac{m}{min}\,.$$

Die gesuchten Geschwindigkeiten betragen also

$$v_1 = 20\,\frac{m}{min} \text{ und } v_2 = 15\,\frac{m}{min}\,.$$

6. Der Mittelpunkt von k sei M, die Länge des Radius von k sei r, die Senkrechte auf g durch A sei s. lo Punkte

I. Angenommen, k' sei einer der gesuchten Kreise. Dann liegt sein Mittelpunkt M' auf s. Da k und k' sich berühren, gilt M' $\neq$ M. Da k' durch A geht, gilt M' $\neq$ A.

Ist ferner P der Berührungspunkt von k und k', so ist

$$\overline{M'A} = \overline{M'P}\,,$$

und da M, M', P auf einer Geraden liegen, gibt es folglich genau einen Punkt B so, daß

(1) $\overline{AB} = \overline{PM}$ und

(2) $\overline{M'B} = \overline{M'M}$

gilt, und dieser Punkt B liegt auf der Geraden s. Aus (1) folgt, daß B auf dem Kreis um A mit r liegt; aus (2) folgt, daß entweder B = M gilt oder M' auf der Mittelsenkrechten m von BM liegt.

Daher kann ein Kreis k' höchstens dann einer der gesuchten Kreise sein, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten wird:

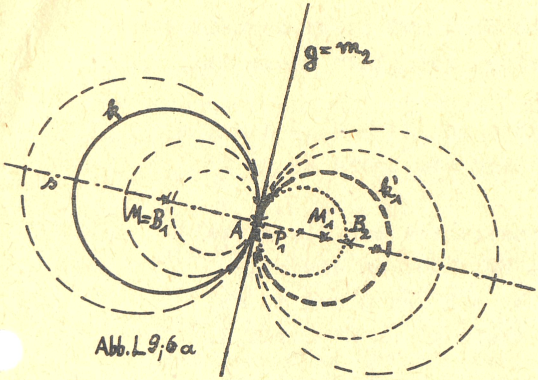

Abb. L 9;6 a

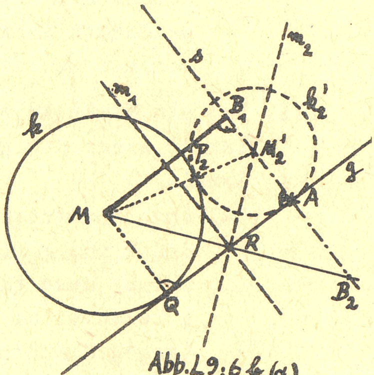

Abb. L 9;6 b (α)

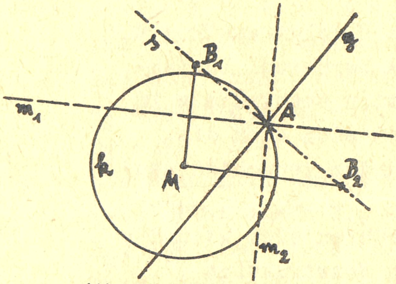

Abb. L 9;6 b (β)

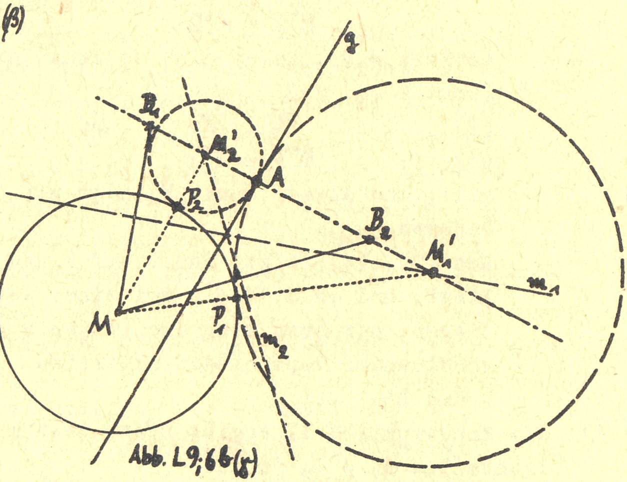

Abb. L 9;6 b (γ)

II. Man schlage den Kreis um A mit r. Er schneidet s in zwei Punkten; einen von ihnen wähle man, er sei B genannt.

(a) Ist $B = M$, so wähle man $M' \neq M, \neq A$ auf s beliebig und schlage den Kreis k' um M' durch A.

(b) Ist $B \neq M$, so konstruiere man die Mittelsenkrechte m von BM. Gibt es einen gemeinsamen Punkt $M' \neq A$ von m und s, so schlage man den Kreis k' um M' durch A.

III. Ist ein Kreis k' wie in II konstruiert, so ist er einer der gesuchten Kreise.

Beweis:

(a) Nach Konstruktion von B folgt aus $B = M$, daß k und g sich in A berühren. Da ferner k' nach Konstruktion ebenfalls g in A berührt, so berühren sich auch die (wegen $M \neq M'$ voneinander verschiedenen) Kreise k und k'.

(b) Nach Konstruktion berühren sich k' und g in A. Ferner ist nach Konstruktion

$$\overline{M'M} = \overline{M'B}$$

sowie $M \neq M'$. Daher gibt es genau einen Punkt P so, daß

(3) $\overline{PM} = \overline{AB}$ und

(4) $\overline{M'P} = \overline{M'A}$

gilt, und dieser Punkt P liegt auf der Geraden $g_{MM'}$.

Aus (3), (4) folgt, daß P auf k und k' liegt, und da M, M', P auf einer Geraden liegen, berühren sich die (wegen $M \neq M'$ voneinander verschiedenen) Kreise k und k'.

IV. Die Konstruktion II ergibt stets zwei Möglichkeiten $B_1 \neq B_2$ für B.

Die Gerade $g_{B_1B_2}$ ist s, der Mittelpunkt der

Strecke B_1B_2 ist A, ihre Mittelsenkrechte ist g.

Entsprechend den verschiedenen Bedingungen, die im weiteren Verlauf der Konstruktion auftraten, unterscheiden wir folgende Fälle:

(a) Bei geeigneter Bezeichnung der Punkte B_1, B_2 ist $B_1 = M$.

Die Wahl $B = B_1$ ergibt nach II (a), III (a) unendlich viele gesuchte Kreise k'.

Die Wahl $B = B_2$ ergibt nach I, II (b) keinen der gesuchten Kreise; denn es wird $m = g$, und folglich haben m und s nur den Punkt A gemeinsam.

(b) Es ist $B_1 \neq M$, $B_2 \neq M$.

Die Mittelsenkrechten m_1, m_2 von B_1M bzw. B_2M sind dann verschieden von g; denn aus $m_1 = g$ folgte $B_2 = M$, aus $m_2 = g$ folgte $B_1 = M$.

Sie sind auch verschieden von s; denn m_1 geht nicht durch B_1, und m_2 geht nicht durch B_2. Sie sind ferner nicht beide parallel zu s; denn B_1M und B_2M können wegen $B_1 \neq B_2$ nicht beide auf s senkrecht stehen.

Geht schließlich eine von ihnen durch A, so auch die andere; denn geht etwa m_1 durch A, so folgt wegen $m_1 \neq g$ dann m_1 nicht parallel g, also B_1M nicht parallel s, also liegt M nicht auf s, und B_1B_2M bilden folglich ein Dreieck; in diesem ist A der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, also geht auch m_2 durch A.

Daher sind nun noch genau folgende Fälle möglich:

(α) Bei geeigneter Bezeichnung ist $m_1 \parallel s$, $m_1 \neq s$, m_2 nicht parallel s.

Die Wahl $B = B_1$ ergibt nach I, II (b) keinen, die Wahl $B = B_2$ ergibt nach I, II (b), III (b) genau einen gesuchten Kreis; denn wegen $B_1M \perp s$ liegt M nicht auf s, also ist B_2M nicht parallel s; ist ferner R die Mitte von B_2M, so ist $AR \parallel B_1M$, also $AR \perp s$; hieraus folgt AR nicht senkrecht zu B_2M; folglich geht m_2 nicht durch A.

(β) Es ist m_1 nicht parallel s, m_2 nicht parallel s, und m_1, m_2 gehen durch A. Nach I, II (b) gibt es keinen der gesuchten Kreise.

(γ) Es ist m_1 nicht parallel s, m_2 nicht parallel s, und m_1, m_2 gehen nicht durch A. Nach I, II (b), III (b) gibt es genau zwei der gesuchten Kreise.

Fall (a) (<u>unendlich viele Lösungen</u>) tritt genau dann ein, wenn <u>k und g sich in A berühren</u>.

Beweis: (a) tritt genau dann ein, wenn $AM \perp g$ und $\overline{AM} = r$ ist.

Fall (b) (α) (<u>genau eine Lösung</u>) tritt genau dann ein, wenn <u>k und g sich berühren, aber nicht in A</u>.

Beweis: Das Lot von M auf g sei MQ. (b) (α) tritt genau dann ein, wenn bei geeigneter Bezeichnung AB_1MQ ein Rechteck ist. Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß bei geeigneter Bezeichnung B_1 mit M auf derselben Seite der Geraden g liegt und $\overline{QM} = \overline{AB_1}$ gilt.

Fall (b) (β) (<u>keine Lösung</u>) tritt genau dann ein, wenn <u>k und g sich nicht berühren und A auf k liegt</u>.

Beweis: (b) (β) tritt genau dann ein, wenn $B_1 \neq M$, $B_2 \neq M$ sowie $\overline{AB_1} = \overline{AM}$ (und $\overline{AB_2} = \overline{AM}$) gilt.

Fall (b) (γ) (<u>genau zwei Lösungen</u>) tritt somit, da die Fallunterscheidung vollständig und disjunkt war, genau dann ein, wenn <u>k und g sich nicht berühren und A nicht auf k liegt</u>.

<u>Hinweis für die Korrektoren:</u>

1) Statt der in I und III auftretenden Gleichungen

$\overline{M'A} = \overline{M'P}$, $\overline{AB} = \overline{PM}$, $\overline{M'B} = \overline{M'M}$ kann man auch $\overline{M'B} = \overline{M'M}$ durch die Längen r, r' der Radien von k, k' ausdrücken und so in I ausnutzen, in III beweisen, daß k und k' sich berühren. Das erfordert aber die unterschiedliche Behandlung folgender drei Möglichkeiten:

Entweder: $\overline{M'B} = \overline{M'M} = r + r'$; k und k' berühren sich von außen; A liegt zwischen B und M'.

Oder: $\overline{M'B} = \overline{M'M} = r - r'$; k' berührt k von innen; M' liegt zwischen B und A.

Oder: $\overline{M'B} = \overline{M'M} = r' - r$; k berührt k' von innen; B liegt zwischen A und M'.

2) Anders als bisher angegeben, ist es auch vertretbar, solche Fälle zuzulassen, in denen k' zum Punkt oder zur Geraden entartet. In den obigen Fällen (a) und (b) (β) kommt dann noch die Lösung k' = A hinzu, in den Fällen (a) und (b) (α) noch die Lösung k' = g.

Auch für k kann man die Entartungsfälle betrachten:

Entartet k zum Punkt M, so gibt es genau die folgenden Lösungen k' (Mittelpunkt M'):

Liegt M nicht auf g, so schneidet s die Mittelsenkrechte von MA in M'.

Liegt M $\neq$ A auf g, so wird k' = g (ob dies als Lösung rechnet, vgl. Hinweis 3).

Ist M = A, so sind alle Kreise, die g in A berühren, Lösung (ob auch die beiden Entartungen k' = A und k' = g, darüber siehe Hinweis 3).

Entartet k zur Geraden, so gibt es genau die folgenden Lösungen k' (Mittelpunkt M'):

Schneiden sich k und g, aber nicht in A, so schneidet s die beiden Winkelhalbierenden von k und g in M'_1, M'_2.

Schneiden sich k und g in A, so wird k' = A.

Ist k $\parallel$ g, so schneidet s die Mittelparallele von k und g in M'.

-8-

3) Man könnte auch daran denken, zwei miteinander identische Kreise als einander berührend aufzufassen. Dann darf im obigen Fall (a) auch $M' = M$ sein.

<u>Hinweis zur Aufgabenformulierung:</u>

Man könnte daran denken, zur Erleichterung die Aufgabe sogleich mit den Voraussetzungen zu stellen, A solle nicht auf k liegen und g solle k nicht berühren. Hierzu sei aber betont: Der Beweis, daß dann genau zwei Lösungen existieren, verlangt gerade das Ausschließen der obigen Fälle (a), (b) (α), (b) (β). Die einzige gewonnene Vereinfachung bestünde also darin, daß für diese 3 Fälle die (wegen der speziellen Lage leichte) Existenz- und Eindeutigkeitsuntersuchung von k' entfallen könnte, also der Abschnitt IV (a) sowie in IV (b) die Abschnitte (α), (β). Alles übrige in I bis IV Dargestellte bliebe nach wie vor notwendig.