A 8 I

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

1. Die Kante eines Würfels habe die Länge $a_1 = 2$ cm, die eines anderen Würfels die Länge $a_2 = 6$ cm. Berechne das Verhältnis der Kantenlängen dieser zwei Würfel, das Verhältnis ihrer Oberflächeninhalte und das Verhältnis ihrer Rauminhalte!

2. Auf der Grundlinie BC eines gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien zwei Punkte M_1 und M_2 gegeben. Durch M_1 und M_2 werden jeweils die Parallelen zu den Dreiecksseiten AB und AC gezogen. Die Parallelen durch M_1 schneiden AB in D und AC in E. Die Parallelen durch M_2 schneiden AB in F und AC in G.
   Beweise, daß der Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich dem Umfang des Parallelogramms M_2GAF ist!

3. Gegeben seien 3000 g einer 7,2-prozentigen Lösung von Kochsalz in Wasser (d.h. in je 1oo g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten). Durch Sieden dieser Lösung verdampft so viel Wasser, daß genau 2400 g der eingedampften Lösung verbleiben.
   Wieviel prozentig ist die so erhaltene Lösung?

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

A 8/II

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

4. Von 10 Koffern und 10 Schlüsseln ist bekannt, daß jeder Schlüssel zu genau einem Koffer paßt, und zu jedem Koffer genau ein Schlüssel. Man weiß aber nicht, welcher Schlüssel zu welchem Koffer gehört. Jemand ermittelt dies durch Probieren, wobei jede Probe darin besteht, daß er für genau einen Koffer und genau einen Schlüssel feststellt, ob sie zusammenpassen oder nicht. Die Reihenfolge der Proben wird so gewählt, daß für jeden einzelnen Koffer, sobald einmal an ihm eine Probe durchgeführt wurde, dann genau so viel Proben vorgenommen werden, bis der passende Schlüssel ermittelt ist.
Welches ist a) die kleinste, b) die größte Zahl von Proben, bei der es vorkommen kann, daß genau nach dieser Probenzahl zu jedem Koffer der richtige Schlüssel feststellbar ist?

5. In einer Ebene sind drei Geraden g_1, g_2, g_3 gegeben, von denen keine zwei einander parallel sind. Außerdem ist eine Länge s gegeben.
Konstruiere einen Kreis, der von jeder der Geraden g_1, g_2, g_3 eine Strecke der Länge s abschneidet!

6. Man denke sich das Produkt aller derjenigen ungeraden Zahlen gebildet, die größer als 30 und kleiner als 50 sind. Beantworte, ohne es vollständig zu berechnen, folgende Fragen:
a) Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produkts?
b) Ist das Produkt eine 18-stellige Zahl?

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1. Die Oberflächeninhalte der beiden Würfel seien O_1 bzw. O_2, die Rauminhalte V_1 bzw. V_2. — 5 Punkte

Dann gilt:

$a_1 : a_2 = 2 : 6 = 1 : 3$

$O_1 : O_2 = 6a_1^2 : 6a_2^2 = 24 : 216 = 1 : 9$

$V_1 : V_2 = a_1^3 : a_2^3 = 8 : 216 = 1 : 27$.

2. Es gilt $\triangle DBM_1 \sim \triangle ABC$ (das folgt aus der Gleichheit von Stufenwinkeln an geschnittenen Parallelen). Also ist das Dreieck $\triangle M_1DB$ gleichschenklig und es gilt: — 7 Punkte

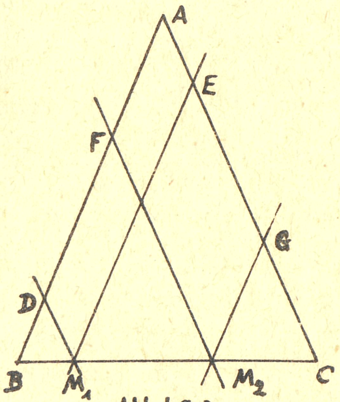

Abb. L 8;2

$\overline{BD} = \overline{M_1D}$. (1)

Weiterhin gilt:

(2) $\overline{M_1E} = \overline{AD}$, da M_1EAD laut Konstruktion ein Parallelogramm ist.

Aus (1) und (2) folgt, daß der halbe Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich der Länge des Schenkels AB ist.

Entsprechend zeigt man, daß der halbe Umfang des Parallelogramms M_2GAF gleich der Länge des Schenkels AC ist. Da $\overline{AC} = \overline{AB}$ gilt, folgt, daß die Umfänge der betrachteten Parallelogramme gleich sind.

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

3. In je loo g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten. Folglich beträgt die Kochsalzmenge in 3000 g Lösung 6 Punkte

$$3o \cdot 7{,}2\ g = 216\ g.$$

Da beim Verdampfen die Kochsalzmenge konstant bleibt, sind also auch in der neuen Lösung von 24oo g genau 216 g Kochsalz enthalten. Mithin enthält die neue Lösung in je loo g eine Kochsalzmenge von genau

$$216\ g : 24 = 9\ g,$$

d.h. die Lösung ist 9-prozentig.

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe

4. Nach Aufgabenstellung müssen an dem Koffer, an dem die erste Probe durchgeführt wurde, genau so viel Proben vorgenommen werden, bis zu ihm der passende Schlüssel ermittelt ist. Das ist frühestens nach einer Probe, spätestens nach 9 Proben der Fall. Sodann ist eine entsprechende Überlegung für die restlichen 9 Koffer und Schlüssel durchzuführen usw. bis zu 2 Koffern und Schlüsseln. Für diese sind mit genau einer Probe alle Zusammengehörigkeiten ermittelt. Also ist die kleinste Probenzahl der gesuchten Art — 6 Punkte

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9,$$

die größte Probenzahl der gesuchten Art

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45.$$

5. I. Angenommen, M sei der Mittelpunkt eines der gesuchten Kreise k. Die Sehnen, die k von g_1, g_2, g_3 abschneidet, sind dann gleich lang, also sind sie gleichweit von M entfernt. Daher liegt M auf einer Winkelhalbierenden w_1 von g_1, g_2 und auf einer Winkelhalbierenden w_2 von g_1, g_3. — 9 Punkte

   a) Haben g_1, g_2, g_3 einen (und wegen ihrer Verschiedenheit dann auch nur einen) Punkt S gemeinsam, so gehen w_1 und w_2 durch S; außerdem ist $w_1 \neq w_2$; denn wäre $w_1 = w_2 = w$, so folgte
   $\sphericalangle(w,g_3) \cong \sphericalangle(g_1,w) \cong \sphericalangle(w,g_2)$, also
   $g_3 = g_2$, also $g_3 \parallel g_2$. Somit ergibt sich $M = S$. (Abb. L 8;5a)

   b) Haben g_1, g_2, g_3 keinen Punkt gemeinsam, so bilden sie nach Voraussetzung ein Dreieck D,

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

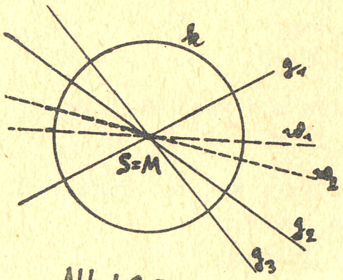

Abb. L 8;5a

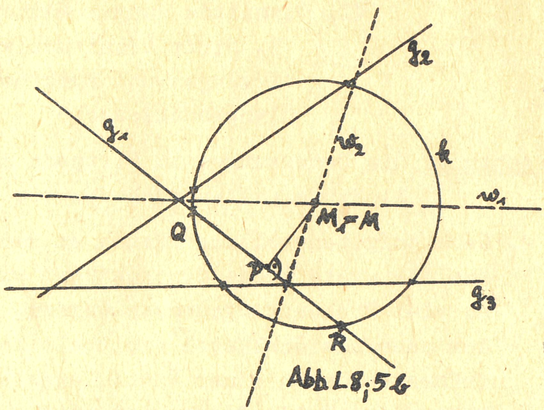

Abb. L 8;5b

und es folgt: M ist einer der 4 Schnittpunkte M_0, M_1, M_2, M_3 der Innen- und Außenwinkelhalbierenden von D.

Daher kann ein Kreis k höchstens dann die verlangte Eigenschaft haben, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten wird:

II. (a) Man schlage den Kreis k um S mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$.

(b) Man wähle als M einen der 4 Punkte M_0, M_1, M_2, M_3. Von M fälle man das Lot MP auf g_1. Um P schlage man den Kreis mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$; er schneidet g_1 in zwei Punkten Q, R. Dann schlage man den Kreis k um M durch Q (Abb. L 8;5b).

III. Ist ein Kreis k wie in II konstruiert, so hat er die verlangte Eigenschaft.

Beweis: Er schneidet von g_1 nach Konstruktion eine Strecke der Länge s ab und von g_2, g_3 je eine ebenso lange Strecke, da sein Mittelpunkt von g_1, g_2, g_3 gleichweit entfernt ist.

IV. Die Konstruktion II ergibt (a) genau einen Kreis, (b) genau 4 verschiedene Kreise. Nach III sind dies und nach I auch nur dies alle gesuchten.

6. a) Multipliziert man eine Zahl, die auf 5 endet, mit einer beliebigen ungeraden Zahl, so erhält man wieder eine Zahl mit der Einerziffer 5. Das zu untersuchende Produkt enthält den Faktor 45, der auf 5 endet, und sonst nur ungerade Faktoren. Seine Einerziffer ist daher eine 5. — 7 Punkte

b) Man kann das Produkt in die Teilprodukte
$31 \cdot 49$, $33 \cdot 47$, $35 \cdot 45$, $37 \cdot 43$ und $39 \cdot 41$
zerlegt denken. Jedes dieser Teilprodukte ist von der Form
$(a - b)(a + b)$ mit $a = 40$ und $1 \leqq b \leqq 9$
und daher eine positive Zahl, die sicher kleiner als 2000 ist. Das gesamte Produkt ist also kleiner als 2000^5.
Nun ist aber
$2000^5 = 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 =$
$= 32 \cdot 1\,000\,000\,000\,000\,000$
eine 17-stellige Zahl.
Daher kann das zu untersuchende Produkt keine 18-stellige Zahl sein.