A 8

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

1. Klaus hat 7 Kugeln: 4 rote, 2 weiße und eine schwarze. Er soll sie in zwei Kästen A und B legen; in A drei, in B vier. Gib sämtliche möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf die zwei Kästen an!
(Die Reihenfolge, in der die Kugeln in den Kästen liegen, soll dabei nicht berücksichtigt werden).

2. In der Ebene ε liege das Parallelogramm ABCD und die völlig außerhalb des Parallelogramms verlaufende Gerade g.
Beweise, daß die Summe der Entfernungen zweier gegenüberliegender Eckpunkte des Parallelogramms von der Geraden g gleich der Summe der Entfernungen der beiden anderen Eckpunkte von g ist!

3. 18 % einer Zahl sind gleich 15 % einer anderen Zahl.
Ermittle das Verhältnis der ersten zur zweiten dieser beiden Zahlen!

4. Beweise folgenden Satz:
Im Tangentenviereck ist die Summe der Längen je zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der Längen der beiden anderen Seiten.

30 02 23-1 1000/66 (E)

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Es genügt, alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf einen der Kästen (z.B. A) zu betrachten, da dadurch die Verteilung der restlichen Kugeln auf den Kasten B eindeutig bestimmt ist. Der Kasten A kann höchstens 1 schwarze, höchstens 2 weiße und höchstens 3 rote Kugeln enthalten. Alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen gibt daher das folgende Schema an: — 8 Punkte

	A	B
1.	r r r	r s w w
2.	r r s	r r w w
3.	r r w	r r s w
4.	r s w	r r r w
5.	r w w	r r r s
6.	s w w	r r r r

Dabei bedeuten:
r - rote Kugel
s - schwarze Kugel
w - weiße Kugel

2. Aus den Voraussetzungen folgt, daß die Vierecke CC'A'A und BB'D'D Trapeze sind, die im Falle $g \perp AC$ oder $g \perp BD$ auch entartet sein können. Beide Trapeze haben die Mittellinie MM' gemeinsam. Die Länge dieser Mittellinie MM' ist nach einem bekannten Satz — 10 Punkte

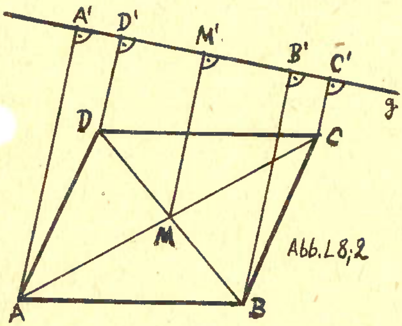

Abb. L8;2

(1) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken AA' und CC' und nach dem gleichen Satz

30 02 23-1 1000/66 (E)

(2) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken BB' und DD'.

Daraus folgt die Behauptung.

3. Ist x die erste Zahl und y die zweite, so gilt nach den Angaben die folgende Gleichung: 12 Punkte

$$\frac{18 \cdot x}{100} = \frac{15 \cdot y}{100},$$

also $6x = 5y$.

Daraus gewinnt man die Proportion

$$x : y = 5 : 6 .$$

Durch Rückschluß erkennt man, daß unter dieser Bedingung auch tatsächlich die Forderung erfüllt wird.

4. 10 Punkte

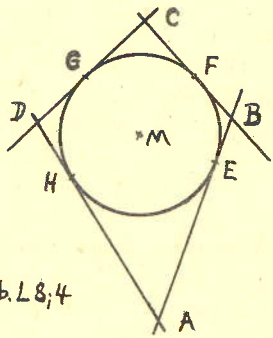

Abb. L 8;4

Behauptung:

$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

Beweis:

Die Berührungspunkte an den Kreis seien E, F, G und H. Weil die beiden Tangentenabschnitte von einem jeden Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis gleichlang sind, gilt:

$\overline{AE} = \overline{AH}$

$\overline{BE} = \overline{BF}$

$\overline{CG} = \overline{CF}$

$\overline{DG} = \overline{DH}$

Daraus folgt:

$\overline{AE} + \overline{BE} + \overline{CG} + \overline{DG} = \overline{AH} + \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{DH}$

das heißt

$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$.