A 7; I

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

1. Es seien a, b, c natürliche Zahlen, wobei a durch b und b durch c teilbar ist. Ermittle das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a, b und c für $a \geqq 1$, $b \geqq 1$, $c \geqq 1$!

2. In einer alten Aufgabensammlung steht folgende Aufgabe: Ein Jagdhund verfolgt einen Fuchs, der ihm 54 Fuchsschritte voraus ist. Die Länge von 2 Hundeschritten ist genau gleich der Länge von 3 Fuchsschritten. Der Hund braucht zu 4 Schritten genauso lange Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten. Mit wieviel Schritten holt der Hund den Fuchs ein, wenn beide gleichzeitig in einunddderselben Richtung starten?

3. Gegeben ist ein Dreieck Δ ABC. Gesucht ist eine Parallele p zu BC, die folgende Eigenschaften hat:
   (1) Sie schneidet die Strecken AB und AC.
   (2) Sind D und E die Schnittpunkte von p mit AB bzw. mit AC, so ist $\overline{BD} + \overline{CE} = \overline{DE}$.

   Beschreibe eine Konstruktion von p !
   Untersuche, ob es stets genau eine solche Parallele p gibt !

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

A 7; II

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen, bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

4. Die Zahl $\frac{16}{15}$ soll in der Form $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ dargestellt werden. Dabei sollen a, b, m, n natürliche Zahlen sein, für die die Brüche $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{n}$ unkürzbar und keine ganzen Zahlen sind.
Gib drei Beispiele einer solchen Darstellung, wobei im
ersten Beispiel $m = n$ und $a \neq b$ gilt,
im zweiten Beispiel $a = b$ und $m \neq n$ gilt,
im dritten Beispiel $a = b$ und $m = n$ gilt!

5. Für jede zweistellige natürliche Zahl gilt der Satz:
Addiert man zu der zweistelligen Zahl die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer, so erhält man eine durch 11 teilbare Zahl.
Beweise diesen Satz!

6. In einem gleichschenkligen Dreieck Δ ABC habe $\sphericalangle$ ACB ein Gradmaß von 120°.
Beweise, daß die Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC die Seite AB in drei gleiche Teile teilen!

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1. **Lösungsweg 1:** 7 Punkte

(1) Sind p, q natürliche Zahlen ≥ 1, wobei p durch q teilbar ist, so ist p das kgV von p, q.

(2) Bei gleichen Voraussetzungen ist q der ggT von p, q.

(3) Das kgV von a, b, c ist das kgV von a und dem kgV von b, c.
Also ist es nach (1) das kgV von a und b. Nochmals nach (1) folgt, daß es a ist.

(4) Der ggT von a, b, c ist der ggT von c und dem ggT von a, b.
Also ist er nach (2) der ggT von c und b. Nochmals nach (2) folgt, daß er c ist.

Lösungsweg 2:

Es gilt
(1) $a = bm$ mit ganzem m, (2) $b = cn$ mit ganzem n, also (3) $a = cnm$, und nm ist ganz.
Aus $a = a \cdot 1$, (1), (3) folgt: a ist gemeinsames Vielfaches von a, b, c. Jedes gemeinsame Vielfache von a, b, c ist Vielfaches von a. Also ist a das kgV von a, b, c.
Aus (3), (2), $c = c \cdot 1$ folgt: c ist gemeinsamer Teiler von a, b, c. Jeder Teiler von a, b, c ist Teiler von c. Also ist c der ggT von a, b, c.

2. Der Hund braucht zu 4 Schritten genau soviel Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten. Da 4 Hundeschritte so lang wie 6 Fuchsschritte sind, kommt der Hund mit je 4 Schritten dem Fuchs um 1 Fuchsschritt näher. Die 54 Fuchsschritte holt der Hund folglich mit $54 \cdot 4$ Hundeschritten = 216 Hundeschritten auf. 5 Punkte

30 02 24-1 . 203/1000/66 (E)

3\. I. Angenommen, p sei eine gesuchte Parallele. 8 Punkte

Dann gibt es auf der Strecke DE einen Punkt P, so daß $\overline{BD} = \overline{DP}$ und $\overline{CE} = \overline{EP}$ gilt. Daraus folgt

$\sphericalangle$ ABP $\cong$ $\sphericalangle$ DPB (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und

$\sphericalangle$ DPB $\cong$ $\sphericalangle$ CBP (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen),

also ist BP die Winkelhalbierende von $\sphericalangle$ ABC. Entsprechend folgt, daß CP die Winkelhalbierende von $\sphericalangle$ ACB ist.

Daher kann eine Gerade p höchstens dann eine der gesuchten Parallelen sein, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten wird:

II. Man konstruiere die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle$ ABC und $\sphericalangle$ ACB und ziehe durch ihren Schnittpunkt P die Parallele p zu BC.

III. Ist eine Gerade p wie in II konstruiert, so ist sie eine gesuchte Parallele.

Beweis: Nach Konstruktion ist

$\sphericalangle$ DBP $\cong$ $\sphericalangle$ CBP (da $\sphericalangle$ ABC durch BP halbiert wird)

und $\sphericalangle$ CBP $\cong$ $\sphericalangle$ DPB (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen),

also ist $\triangle$ BPD gleichschenklig, und zwar ist $\overline{BD} = \overline{DP}$. Ebenso folgt $\overline{CE} = \overline{EP}$ und daher $\overline{BD} + \overline{CE} = \overline{DE}$. Außerdem liegt P im Innern des Dreiecks $\triangle$ ABC, also schneidet p die Strecken AB und AC.

IV. Die Konstruktion II ist stets eindeutig durchführbar; denn die Winkelhalbierenden, ihr Schnittpunkt P und die Parallele durch P zu BC existieren stets eindeutig. Nach III gibt es daher stets eine gesuchte Parallele p und nach I auch nur eine solche.

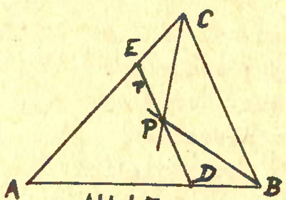

Abb. L 7;3

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

4. I.) $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$ kann z.B. mit $m = 15$, $a = 2$, $b = 14$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: — 5 Punkte

$$\frac{16}{15} = \frac{2}{15} + \frac{14}{15}.$$

II.) $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{n} = \frac{a(m+n)}{mn}$ kann z.B. mit $m = 3$, $n = 5$, $a = 2$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind:

$$\frac{16}{15} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}.$$

III.) $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}$ kann (zugleich mit den übrigen Bedingungen der Aufgabe nur) durch $m = 15$, $a = 8$ erreicht werden:

$$\frac{16}{15} = \frac{8}{15} + \frac{8}{15}.$$

5. **Lösungsweg 1:** — 7 Punkte

Die zweistellige Zahl ist darstellbar als $10a + b$ mit ganzen Zahlen a und b, für die $0 < a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$ gilt. Die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer ist daher $a - b$. Addiert man sie laut Aufgabe zu der zweistelligen Zahl, so erhält man:
$10a + b + a - b = 11a$; die erhaltene Zahl ist also durch 11 teilbar, w.z.b.w.

Lösungsweg 2:

Laut Aufgabe werden zu der zweistelligen Zahl soviel Einer addiert, wie sie Zehner besitzt, und soviel Einer subtrahiert, wie sie Einer besitzt. Es entsteht daher eine zweistellige Zahl, bei der die Anzahl der Zehner gleich der der Einer ist. Alle derartigen Zahlen (11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99) sind aber durch 11 teilbar.

6. Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ muß AB sein, da das Dreieck sonst zwei Winkel von 120° hätte. Also ist $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle ABC$ (Gradmaß 30°). Die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC mit der Seite AB seien D bzw. E. — 8 Punkte

Dann ist

(1) $\overline{AD} = \overline{CD}$ (da D auf der Mittelsenkrechten von AC liegt), also

$\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle BAC$ (Gradmaß 30°) (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck $\triangle ACD$).

Daher hat der Winkel

$\sphericalangle CDE$ ein Gradmaß von 60° (Außenwinkel im Dreieck $\triangle ACD$).

Ebenso zeigt man

(2) $\overline{BE} = \overline{CE}$ und

$\mu(\sphericalangle CED) = 60^\circ$.

Also ist $\triangle CDE$ gleichseitig, und es folgt

(3) $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{CE}$.

Aus (1), (2), (3) folgt die Behauptung

$$\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{BE}\ .$$

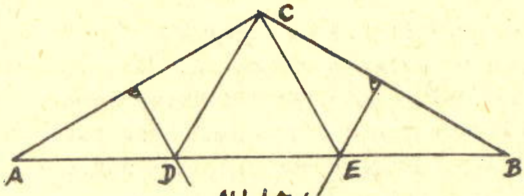

Abb. L 7;6