A 7

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 7

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

1. Gegeben sind eine Gerade g und ein nicht auf g liegender Punkt P.
   Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal alle Geraden durch P, die mit g einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden!

2. In den Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei das nicht überschlagene Viereck ABCD so eingezeichnet, daß alle seine Seiten Sehnen des Kreises sind (Sehnenviereck).
   Beweise, daß in jedem Sehnenviereck die Summe der Gradmaße je zweier gegenüberliegender Winkel 180° beträgt!

3. Jemand schreibt alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5 555 auf, jede genau einmal.
   Berechne die Anzahl aller dabei geschriebenen Ziffern 9!

4. In einem zylindrischen Gefäß (gerader Kreiszylinder mit waagerechter Bodenfläche) befindet sich Wasser. Der Wasserspiegel steht bei $\frac{3}{4}$ der Höhe des Gefäßes. Nachdem genau $2\frac{1}{2}$ Liter Wasser aus diesem Gefäß ausgegossen wurden, steht der Wasserspiegel bei $\frac{2}{5}$ der Gefäßhöhe.
   Welches Fassungsvermögen hat das Gefäß?

30 02 23-1 1000/66 (E)

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Man wählt auf g einen beliebigen Punkt Q und schlägt um ihn mit $\overline{PQ}$ den Kreis k_1. Dieser schneidet g in zwei Punkten: R und $\overline{R}$. 10 Punkte

Nun schlägt man um R und um P mit $\overline{PQ}$ die Kreise k_2 und k_3. Diese schneiden einander in Q und in einem Punkt $S \neq Q$ (andernfalls würden sie sich in Q berühren, also lägen R, P und Q auf der selben Geraden, d.h. P läge auf g, im Widerspruch zur Voraussetzung).

Schlägt man nun mit $\overline{PQ}$ um S den Kreis k_4, so schneidet dieser k_3 in zwei Punkten: X und X', $X \neq X'$. Die Geraden g_{PX} und $g_{PX'}$ und nur diese genügen der Aufgabenstellung. (Der zweite Schnittpunkt R' von k_1 und g führt zwar zu anderen Punkten $\overline{X}$ und $\overline{X}'$, aber zu denselben Geraden).

Beweis: Laut Konstruktion ist das Dreieck $\triangle SXP$ gleichseitig. Außerdem ist $SP \parallel RQ$ (als Seiten in dem Rhombus RQPS). Die Gerade g_{PX} schneide g im Punkte P_1. Dann gilt (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)

$\sphericalangle SPP_1 \cong \sphericalangle PP_1\overline{R}$ d.h. $\sphericalangle PP_1\overline{R}$ hat ein Gradmaß von 60°. Ebenso ist laut Konstruktion $X'P \parallel SX$. Die Gerade $g_{PX'}$ schneidet mithin g ebenfalls unter einem Winkel von 60°. Da es nur zwei Geraden durch P gibt, die mit g einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden, sind damit alle derartigen Geraden gefunden.

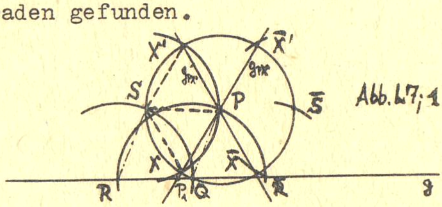

Abb. L7;1

2. Wir betrachten irgend zwei gegenüberliegende Winkel und bezeichnen ihre Gradmaße mit α und γ und ihre Scheitelpunkte mit A und C, so daß also α und γ die Gradmaße der Winkel $\measuredangle DAB$ und $\measuredangle BCD$ sind. Ferner seien β_1, β_2, δ_1 bzw. δ_2 die Gradmaße der Winkel $\measuredangle ABM$, $\measuredangle MBC$, $\measuredangle CDM$ und $\measuredangle MDA$. 12 Punkte

<u>Behauptung:</u> $\alpha + \gamma = 180^\circ$

<u>Beweis:</u> Wir unterscheiden 3 Fälle.

<u>Fall 1</u> (Punkt M liegt im Innern des Sehnenvierecks):

In den Dreiecken ΔABM, ΔBCM, ΔCDM und ΔDAM sind die von M ausgehenden Seiten Radien des Kreises k. Diese Dreiecke sind daher gleichschenklig mit der Spitze M.

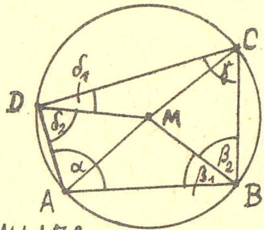

Abb. L 7; 2 a

Daraus folgt:

(1) $\beta_1 + \delta_2 = \alpha$

und

(2) $\beta_2 + \delta_1 = \gamma$.

Weiterhin gilt:

(3) $\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 360^\circ$,

als Winkelsumme im Viereck ABCD.

Aus (1), (2) und (3) folgt

$\alpha + \gamma + \alpha + \gamma = 360^\circ$

$\alpha + \gamma = 180^\circ$ w.z.b.w.

<u>Fall 2</u> (Punkt M liegt auf dem Rande des Sehnenvierecks):

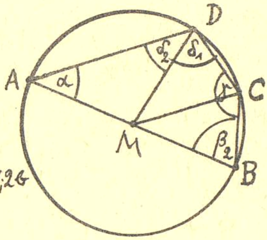

Abb. L 7; 2 b

In diesem Fall ist entweder

$\beta_1 = 0$

oder $\beta_2 = 0$

oder $\delta_1 = 0$

oder $\delta_2 = 0$.

Der Beweis verläuft analog.

Fall 3 (Punkt M liegt außerhalb des Sehnenvierecks):

In diesem Falle ist entweder

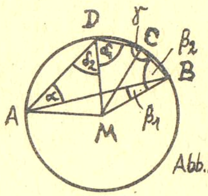

Abb. L 7.2c

β_1 durch $-\beta_1$
oder β_2 durch $-\beta_2$
oder δ_1 durch $-\delta_1$
oder δ_2 durch $-\delta_2$
zu ersetzen.

Der Beweis verläuft analog Fall 1.

3\. Die Anzahl der Ziffern 9 beträgt — 8 Punkte

an der Tausenderstelle — 0

an der Hunderterstelle (von 1 bis 999, von 1000 bis 1999, von 2000 bis 2999, von 3000 bis 3999, von 4000 bis 4999 je 100 mal die Ziffer 9)

$$5 \cdot 100 = 500$$

an der Zehnerstelle (in jedem Hunderterbereich 10 mal, in 55 Hunderterbereichen also)

$$10 \cdot 55 = 550$$

an der Einerstelle (in jedem Zehnerbereich eine Ziffer 9, in 555 Zehnerbereichen also)

$$1 \cdot 555 = 555.$$

Insgesamt wird die Ziffer 9 dabei 1605 mal aufgeschrieben.

4\. Das Volumen (in Litern gemessen) ist der Höhe des Gefäßes direkt proportional. $\frac{3}{4}$ des Volumens verringern sich auf $\frac{2}{5}$ des Volumens dadurch, daß $2\frac{1}{2}$ Liter ausgegossen werden. — 10 Punkte

Wegen $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$ folgt daraus: $\frac{7}{20}$ des Volumens sind gleich $2\frac{1}{2}$ Liter. Das Gefäß hat demnach ein Fassungsvermögen von

$$\frac{20}{7} \cdot 2\frac{1}{2} \text{ Liter} = \frac{50}{7} \text{ Liter}.$$