A 6

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 6

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten (mathematischen und geometrischen) Sachverhalte - Definitionen, Sätze, Formeln, Verfahren - anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

1. Eine Strecke von 20 m wird in drei Teilstrecken geteilt. Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite, und die Länge der dritten Teilstrecke beträgt das Dreifache der Länge der ersten Teilstrecke.
Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

2. Gesucht ist die Menge aller natürlichen Zahlen a, die folgenden Bedingungen genügen:
(1) $100 < a < 1201$,
(2) a ist sowohl durch 3 als auch durch 4 als auch durch 5 teilbar,
(3) a ist nicht durch 8, nicht durch 9 und nicht durch 25 teilbar,
(4) a läßt bei der Division durch 11 einen Rest, der durch 2 teilbar ist.

3. Gegeben ist ein Winkel mit dem Gradmaß $\alpha = 36^\circ$ (siehe Abb. 6;3).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel, dessen Gradmaß 99° beträgt!

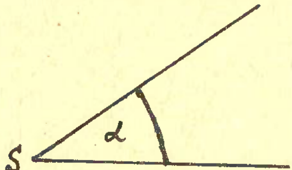

Abb. 6;3

4. Im Rahmen des Wiederaufbaus der Leipziger Innenstadt entstehen moderne Wohnkomplexe. Vor den Häusern werden Rasenflächen, Blumenbeete und Terrassen angelegt.
Für eine der rechteckigen Terrassen werden genau 400 Sandsteinplatten verwendet. Die Platten bedecken lückenlos den Boden. Jede dieser Platten ist 60 cm lang und 40 cm breit. Die Länge dieser Terrasse beträgt 10 m.
Ermittle die Breite dieser Terrasse!

30 02 23-1 1000/66 (E)

L 6

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

<u>Lösungen und Punktbewertung</u>

Olympiadeklasse 6

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Bezeichnet man die Länge der zweiten Teilstrecke mit a, dann hat die erste Teilstrecke die Länge 2a und die dritte Teilstrecke die Länge 6a. Die Länge der Gesamtstrecke beträgt also — lo Punkte

$$a + 2a + 6a = 9a .$$

Das sind laut Aufgabe 20 m.

Für die Länge der zweiten Teilstrecke gilt daher

$$20 : 9 = \frac{20}{9} ,$$

für die Länge der ersten Teilstrecke

$$\frac{20}{9} \cdot 2 = \frac{40}{9}$$

und für die Länge der dritten Teilstrecke

$$\frac{40}{9} \cdot 3 = \frac{40}{3} .$$

Die Längen der einzelnen Teilstrecken sind also

$$2\frac{2}{9}\text{ m},\ 4\frac{4}{9}\text{ m und } 13\frac{1}{3}\text{ m} .$$

2. Wegen (2) ist a durch 60 teilbar. Es gilt daher $a = 60 \cdot b$, b ganz, und wegen (1) folgt $100 < 60\,b < 1201$. Somit muß b der Bedingung $1 < b < 21$ genügen. Wegen (3) kann b nicht durch 2, nicht durch 3 und nicht durch 5 und wegen (4) auch nicht durch 11 teilbar sein. Auf Grund der obigen Überlegungen kommen für den Faktor b nur die Zahlen 7; 13; 17 und 19 in Frage. Es sind also noch die Zahlen 420; 780; 1020 und 1140 zu betrachten, die sämtlich (1), (2) und (3) erfüllen. Von ihnen genügen nur 420; 780 und 1020 der Bedingung (4). 420; 780 und 1020 sind die gesuchten Zahlen. Es gibt keine weiteren natürlichen Zahlen, die (1) bis (4) gleichzeitig erfüllen. — 14 Punkte

30 02 23-1 1000/66 (E)

3. Der geforderte Winkel läßt sich als Summe aus einem rechten Winkel und einem Winkel vom Gradmaß 9° konstruieren. 10 Punkte

Der rechte Winkel wird nach Grundkonstruktion 2 (Lehrbuch Klasse 6) konstruiert. Dann halbiert man nach Grundkonstruktion 3 den gegebenen Winkel und halbiert einen der beiden so erhaltenen Winkel (Gradmaß $\frac{\alpha}{2} = 18^\circ$) noch einmal. Dadurch entsteht ein Winkel vom Gradmaß $\frac{\alpha}{4} = 9^\circ$. Man addiert auf die im Lehrbuch Klasse 5 angegebene Weise den rechten Winkel und den Winkel von 9° und erhält, wie verlangt, einen Winkel von 99°.

4. Der Flächeninhalt jeder dieser Platten beträgt $60 \cdot 40\ \text{cm}^2 = 2400\ \text{cm}^2$. Daher bedecken 400 solche Platten eine Fläche von $400 \cdot 2400\ \text{cm}^2 = 960\,000\ \text{cm}^2 = 96\ \text{m}^2$. Die Terrassenfläche ist rechteckig, ihr Flächeninhalt mithin gleich dem Produkt aus ihrer Länge und ihrer Breite. 6 Punkte

Die unbekannte Breite betrage b Meter, dann gilt

$$10\,b = 96 \quad \text{, woraus man}$$
$$b = 9{,}6 \quad \text{erhält.}$$

Die Breite der Terrasse beträgt also 9,6 m.