

11/12; I

V. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 11/12 - 1. Tag

**Achtung:** Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien usw.) muß deutlich erkennbar sein.

1. Man ermittle alle reellen Zahlen  $a$ ,  $b$  und alle ganzen Zahlen  $n \geq 1$ , für die
$$(a + b)^n = a^n + b^n$$
 gilt.
2. An einem Tanzabend hat jeder der anwesenden Herren mit mindestens einer der anwesenden Damen getanzt und jede der anwesenden Damen mit mindestens einem der anwesenden Herren. Kein Herr hat mit jeder der anwesenden Damen und keine Dame mit jedem der anwesenden Herren getanzt. Es ist zu beweisen, daß es unter den Anwesenden zwei solche Damen und zwei solche Herren gegeben hat, daß an dem Abend jede der beiden Damen mit genau einem der beiden Herren und jeder der beiden Herren mit genau einer der beiden Damen getanzt hat. (Es wird vorausgesetzt, daß der Tanzabend nicht ohne Damen und Herren stattgefunden hat, d.h. die Menge, die aus allen anwesenden Damen und Herren besteht, ist nicht leer).
3. Unter allen Strecken  $MN$ , die das Dreieck  $\triangle ABC$  in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegen, ist die Anzahl und die Länge aller derjenigen zu ermitteln, die möglichst kurz sind.

11/12; II

V. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 11/12 - 2. Tag

**Achtung:** Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien usw.) muß deutlich erkennbar sein.

4. Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist.

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4 = 2 \quad (1)$$

$$x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3 = 2 \quad (2)$$

$$x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 + x_2 = 2 \quad (3)$$

$$x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_1 = 2 \quad (4)$$

5. Man beweise, daß

$$\tan 7^\circ 30' = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2 \quad \text{gilt.}$$

6. Man beweise den folgenden Satz .

"Wenn der Schnitt jeder Ebene, die mit der Fläche F mehr als einen Punkt gemeinsam hat, ein Kreis ist, dann ist F eine Kugel(fläche)."