11 u. 12/ I

V. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11 und 12 - 1. Tag

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien usw.) muß deutlich erkennbar sein.

1. Es ist zu beweisen, daß die Zahl $z = 2^n + 1$, für keine natürliche Zahl $n \geq 0$ Kubikzahl ist.

2. Die in der Abb. A 11; 2 im Grundriß gegebene vierseitige Pyramide soll durch eine Ebene derart geschnitten werden, daß die Schnittfläche ein Parallelogramm ist.

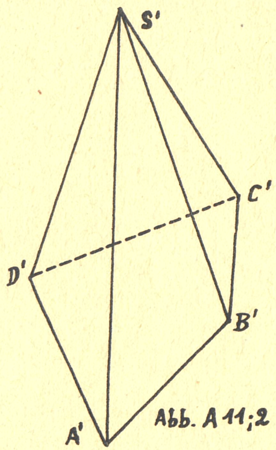

Abb. A 11;2

a) Konstruieren Sie an dem gegebenen Grundriß die geforderte Schnittfläche und die Spurgerade der zugehörigen Schnittebene!

b) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Trapez ist?

c) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Parallelogramm ist ?

3. a) Man ermittle sämtliche Funktionen $y = f(x)$, die für alle reellen Zahlen definiert sind und der Gleichung $a \cdot f(x - 1) + b \cdot f(1 - x) = cx$ (a, b, c reelle Zahlen) genügen, falls $|a| \neq |b|$ gilt!

   b) Man diskutiere ferner den Fall $|a| = |b|$!

30 01 77 - 1 1000/66 (E)

V. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11 und 12 - 2. Tag

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien usw.) muß deutlich erkennbar sein.

4. Die Paare (x_n, y_n) reeller Zahlen x_n, y_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ seien wie folgt definiert:

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0$$

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n, \quad y_{n+1} = x_n + y_n \quad \text{für} \quad n \geqq 0 .$$

Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$$

gilt !

5. Der Flächeninhalt des ebenen (nicht notwendig konvexen) Vierecks ABCD sei S, die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA seien (in dieser Reihenfolge) a, b, c, d.

Man beweise, daß stets gilt

$$S \leqq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2},$$

und untersuche, wann das Gleichheitszeichen gilt !

6. Man beweise, daß für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ die folgenden Beziehungen gelten!

(1) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin (2n-1)x = \dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$,

für alle reellen x mit $\sin x \neq 0$

(2) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin (2n-1)x = 0$,

für alle reellen x mit $\sin x = 0$.

30 01 77 - 1 1000/66 (E)