V. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen 11 und 12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien usw.) muß deutlich erkennbar sein.

1. Aus einer Kugel vom Radius r wird ein Kugelsektor herausgeschnitten, der sich aus einem Kegel der Höhe h und dem zugehörigen Kugelsegment zusammensetzt.
   a) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn der Flächeninhalt der herausgeschnittenen Kugelkappe gleich einem Drittel des Oberflächeninhalts der Kugel ist?
   b) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn das Volumen des Kugelsektors gleich einem Drittel des Volumens der Kugel ist?
2. Man ermittle sämtliche nicht negativen ganzen Zahlen n, für die die Zahl
$$z = 5^n - 4^n$$
durch 61 teilbar ist !
3. Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine reelle Funktion mit den folgenden Eigenschaften:
   (1) Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x + a$ und $x - a$ definiert.
   (2) Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt
$$f(x+a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$$
   a) Es ist zu beweisen, daß die Funktion f periodisch ist, d.h. daß es eine von Null verschiedene reelle Zahl b gibt, so daß
$$f(x) = f(x + k b)$$
   für alle x, für die die Funktion f definiert ist, und für alle ganzen Zahlen k gilt.
   b) Geben Sie eine Funktion an, die die obigen Eigenschaften hat !

30 01 93-1 • 1000/65 (E)

V. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklassen 11 und 12 - 2. Tag-

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien usw.) muß deutlich erkennbar sein.

4. Man ermittle alle reellen Zahlen x, y, für die die Gleichung

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y$$

erfüllt ist!

5. Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x, für die das Polynom

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

a) seinen kleinsten Wert annimmt (Wie groß ist dieser?) und

b) seinen größten Wert annimmt, wenn x auf das Intervall

$$1 \leqq x \leqq 4$$

beschränkt wird (Wie groß ist dieser?) !

6. Kann ein von einem regelmäßigen Tetraeder begrenzter Körper bei parallelem und senkrecht auf die Bildebene auftreffendem Licht auf dieser einen quadratförmigen Schatten werfen?

30 01 93-1 • 1000/65 (E)