10; I

V. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien usw.) muß deutlich erkennbar sein.

1. Es seien m, n, p und q ganze Zahlen mit der Eigenschaft $m - p \neq 0$.
   Man zeige, daß in diesem Fall $m - p$ genau dann Teiler von $mq + np$ ist, wenn $m - p$ Teiler von $mn + pq$ ist!

2. a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_a + h_b = 10$ cm, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$! Dabei ist h_a die Länge der zur Seite BC gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe, α das Maß des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β das Maß des Winkels $\sphericalangle CBA$.
   b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion .

3. Man beweise den folgenden Satz !
   "Die sechs Ebenen, deren jede einen Innenwinkel zwischen zwei Seitenflächen des (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders mit den Ecken A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, halbiert, schneiden einander in genau einem Punkt M. Dieser ist der Mittelpunkt der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel."
   Anmerkung: Die Existenz einer einbeschriebenen Kugel soll beim Beweis nicht benutzt werden.

30 02 22-1 . 203/1000/66

V. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien usw.) muß deutlich erkennbar sein.

4. Man berechne die Differenz D aus der Summe der Quadrate aller geraden natürlichen Zahlen ≤ 100 und der Summe der Quadrate aller ungeraden natürlichen Zahlen < 100.

5. Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x und y, die die Gleichung

$$[\sin (x - y) + 1] \cdot [2 \cos (2x - y) + 1] = 6$$

erfüllen.

6. Der Kreis k rolle auf dem Kreis k', dessen Radius doppelt so groß ist wie der von k, ohne zu gleiten, ab, indem er stets k' von innen berührt (Abb. 10; 6).
Man ermittle die Bahnkurve, die ein beliebiger auf k fixiert zu denkender Punkt P bei dieser Bewegung durchläuft.
Anleitung: Man beweise zunächst den folgenden Hilfssatz.

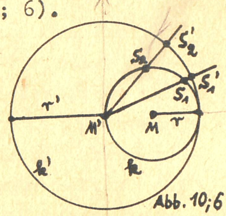

Abb. 10;6

"Trifft jeder von zwei vom Mittelpunkt M' von k' ausgehenden Strahlen k ein zweites Mal, so werden durch diese Schnittpunkte k bzw. k' in zwei solche Bögen zerlegt, daß die im gleichen Winkelraum gelegenen Bögen gleich lang sind."

30 02 22-1 · 203/1000/66