

V. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien usw.) muß deutlich erkennbar sein.

1. Beweisen Sie die folgende Behauptung:

"Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl läßt bei Division durch 3 den Rest 1."

2. a) Konstruieren Sie das Dreieck $\triangle ABC$, wenn α , a und s_c gegeben sind! Dabei bedeutet α das Maß des Winkels $\sphericalangle CAB$, a die Länge der Seite BC und s_c die Länge der Seitenhalbierenden CD , wobei D der Mittelpunkt der Seite AB ist.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion !

Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung soll kurz gehalten sein. Bei der Konstruktion von Dreiecken genügt die Angabe von Seiten und Winkeln, aus denen sich das Dreieck konstruieren läßt.

3. Die positive ganze Zahl x ende auf die Ziffern a und b (in dieser Reihenfolge).

Man ermittle alle geordneten Paare (a, b) , für die x^2 auf dieselben Ziffern a und b (auch in bezug auf die Reihenfolge) endet !

4. Man ermittle für die reellen Zahlen a und b , $a \neq 0$, die dem Betrag nach kleinere Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0.$$

5. In dem Parallelogramm ABCD sei $\overline{AB} = \overline{CD} = a$, $\overline{BC} = \overline{AD} = b$, ($a > b$) und $\overline{AE} = h$, wobei E der Fußpunkt des vom Punkt A auf die Seite CD bzw. ^a ihre Verlängerung gefällten Lotes ist. Ferner sei eine Kreisscheibe mit einem Radius der Länge r gegeben. Der Mittelpunkt der Kreisscheibe durchlaufe sämtliche Seiten des Parallelogramms.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche F , die von der Kreisscheibe überstrichen wird!

6. Eine Mutter stellt ihren drei Kindern Jürgen, Renate und Christine eine Schüssel mit Kirschen auf den Tisch mit dem Bemerkung, daß sich jeder nach Rückkehr ein Drittel der Kirschen nehmen möge. Jürgen, der als erster nach Hause kommt, nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch 3 teilbar ist, zunächst eine Kirsche und dann von den restlichen den dritten Teil. Als Renate heimkommt, meint sie, die erste zu sein. Sie nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch 3 teilbar ist, zunächst zwei und von den übrigen den dritten Teil. Auch Christine glaubt, als sie heimkehrt, erste zu sein, und nimmt sich den dritten Teil der in der Schüssel befindlichen Kirschen. Die Mutter stellt danach fest, daß insgesamt 42 Kirschen gegessen wurden.

Wieviel Kirschen befanden sich anfangs in der Schüssel?