V. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 7 - 1. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1. Sämtliche Faktoren von z sind von der Form $100a + 76$. Wegen $(100a + 76)(100b + 76) = 10\,000\, ab + 100\,(76a + 76b) + 76^2$, wobei a und b natürliche Zahlen sind, sind allein die beiden letzten Stellen von 76^2 für die beiden letzten Stellen von z entscheidend. Da $76^2 = 5776$ ist, endet z auf 76. — 6 Punkte

2. a) Für die Konstruktion: — 3 Punkte

   b) Für die Beschreibung und Begründung: — 4 Punkte

   Die Länge der Strecke AB sei a. Man schlägt um A und B Kreisbögen mit dem gleichen Radius von der Länge $r > \frac{a}{2}$. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreisbögen seien C und D, die Länge der Strecke CD sei b. Nun schlägt man um C und D Kreisbögen mit dem gleichen Radius $r_1 > \frac{b}{2}$. Die entstehenden Schnittpunkte P_1 und P_2 liegen auf der Geraden durch A und B (siehe Abb. L 7; 2) und sind, falls $r_1 \neq r$ ist, von A und B verschieden.

   Beweis: Die Gerade durch C und D ist auf Grund der Konstruktion Symmetrieachse zu der Strecke AB. Aus demselben Grund ist die Gerade durch A und B Symmetrieachse zu der Strecke CD. Da laut Konstruktion $\overline{CP_1} = \overline{DP_1}$ und $\overline{CP_2} = \overline{DP_2}$ gilt, liegen P_1 und P_2 auf der die Punkte A und B enthaltenden Symmetrieachse der Strecke CD.

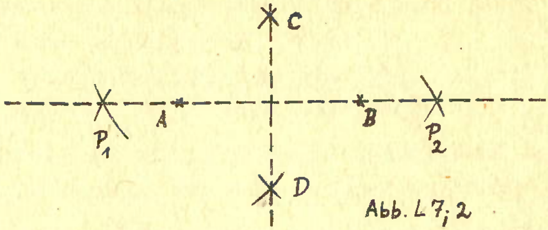

Abb. L 7; 2

3. Die Gerade durch A und M schneide die Seite CB im Punkt D. D liegt zwischen C und B. Das Maß des Winkels $\sphericalangle$ CMD sei ε_1, das des Winkels $\sphericalangle$ CAM sei α_1, das des Winkels $\sphericalangle$ DMB sei ε_2 und das des Winkels $\sphericalangle$ MAB sei α_2. Dann gilt (siehe Abb. L 7; 3): 6 Punkte

(1) $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$; $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$

(2) $\varepsilon_1 > \alpha_1$ (nach dem Außenwinkelsatz)

(3) $\varepsilon_2 > \alpha_2$ (nach dem Außenwinkelsatz)

und folglich wegen (2) und (3)

(4) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > \alpha_1 + \alpha_2$ und wegen (1) und (4)

(5) $\varepsilon > \alpha$ w.z.b.w.

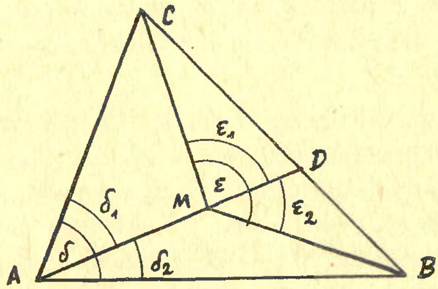

Abb. L 7; 3

V. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

4. Die erwähnten Zahlen können entweder 9 Punkte

(1) 4 gleiche Ziffern oder
(2) genau 3 gleiche Ziffern oder
(3) 2 untereinander verschiedene Paare von gleichen Ziffern oder
(4) genau 2 gleiche Ziffern enthalten.

Da nur 3 verschiedene Ziffern zugelassen sind, erhält man im Falle (1) 3 verschiedene derartige Zahlen. Im Falle (2) gibt es für jeweils 3 gleiche Ziffern 4 verschiedene Möglichkeiten der Anordnung, wobei die 4. Ziffer jeweils eine der beiden anderen vorgegebenen Ziffern ist. Da 3 Ziffern vorgegeben wurden, beträgt im Falle (2) die Anzahl der derartigen vierstelligen Zahlen
$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.
Im Falle (3) lassen sich die Ziffern der beiden Paare jeweils auf 6 verschiedene Weisen anordnen (nämlich aabb, bbaa, abba, baab, abab, baba).
Da es 3 verschiedene Möglichkeiten der Zusammenstellung solcher Paare gibt, beträgt im Falle (3) die Anzahl der erwähnten vierstelligen Zahlen
$6 \cdot 3 = 18$. Im Falle (4) lassen sich die beiden gleichen Ziffern, wenn man die Reihenfolge der beiden übrigen, von ihnen verschiedenen Ziffern beibehält, auf 6 verschiedene Weisen anordnen (nämlich aabc, bcaa, abca, baac, abac, baca). Für die Reihenfolge der beiden übrigen Ziffern gibt es genau 2 Möglichkeiten (nämlich bc und cb).
Da 3 verschiedene Paare gleicher Ziffern möglich

sind, beträgt im Falle (4) die Anzahl der gesuchten vierstelligen Zahlen $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.
Die Anzahl aller derartigen Zahlen beträgt mithin $3 + 24 + 18 + 36 = 81$.

5. Im Trapez ABCD ist das Dreieck $\triangle ACD$ gleichschenklig. 6 Punkte
Daher gilt (1) $\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle ACD$. Ferner gilt
(2) $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle ACD$ (als Wechselwinkel an Parallelen)
und daher wegen (1) und (2) auch

$$\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle CAB \text{ .}$$

Da kongruente Winkel das gleiche Winkelmaß haben, halbiert also die Diagonale AC des gegebenen Trapezes den Winkel $\sphericalangle DAB$.

6. Die Anzahl der durchschnittlich an jedem Arbeitstag laut Plan anzufertigenden Werkstücke beträgt 6 Punkte
$\frac{p}{20}$. In Wahrheit wurden aber $(p + k)$ Werkstücke in $(20 - 5)$ Tagen produziert, an jedem Arbeitstag also durchschnittlich $\frac{p + k}{15}$ Werkstücke. Daher betrug die Anzahl der durchschnittlich an jedem Arbeitstag über den Plan hinaus angefertigten Werkstücke $\frac{p + k}{15} - \frac{p}{20} = \frac{p + 4k}{60}$.