V. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

<u>Lösungen und Punktbewertung</u>

Olympiadeklasse 7   Gesamtpunktzahl: 40 Punkte

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1. Eine Straßenbahnfahrt kostet   11 Punkte

im Falle (1)   20 Pf,

im Falle (2) $16\frac{2}{3}$ Pf,

im Falle (3)   15 Pf.

Im Falle (3) kosten x Fahrten im Monat genau $15 \cdot x$ Pf, in den Fällen (1) und (2) sogar noch mehr, während sie im Fall (4) gerade 1000 Pf kosten. Daher ist die Monatskarte bei x Fahrten genau dann am billigsten, wenn $15 \cdot x \geqq 1000$ ist; d.h. bei 67 und mehr Fahrten monatlich ist die Monatskarte am billigsten, bei weniger Fahrten nicht. Die gesuchte Anzahl ist daher 67.

2. Angenommen, es gäbe ein Dreieck Δ ABC, in dem sich die Winkelhalbierenden w_α und w_β im Punkte S unter einem rechten Winkel schneiden. Dann ergäbe sich aus dem Dreieck ΔASB, daß die Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ zusammen 90°, und damit α und β zusammen 180° betragen müßten, d.h. zwei Seiten des Dreiecks Δ ABC würden parallel verlaufen, was unmöglich ist. Es gibt also kein Dreieck dieser Art.   10 Punkte

3. Man vergleicht die beiden ersten Summanden (100 und 102), die beiden zweiten Summanden (104 und 106) usw. bis zu den beiden letzten Summanden (996 und 998). In jedem dieser Paare ist die erste Zahl um 2 kleiner als die zweite.   10 Punkte

a) Die Summe der nicht durch 4 teilbaren dreistelligen geraden Zahlen ist daher größer als die Summe der durch 4 teilbaren dreistelligen Zahlen.

b) Es gibt 225 solcher Paare, die Differenz der betrachteten Summen ist also dem Betrage nach 450.

4. Der gemeinsame Endpunkt der Sehnen sei C, die anderen beiden Endpunkte seien A bzw. B. M sei der Mittelpunkt des Kreises (siehe Abb. L 7; 4). Dann sind $\sphericalangle$ BCA und $\sphericalangle$ BMA Peripherie- bzw. Zentriwinkel über dem gleichen Bogen oder über zueinander komplementären Bogen. Da nach Voraussetzung $\sphericalangle$ BCA das Winkelmaß $\alpha = 30^\circ$ hat, hat $\sphericalangle$ BMA ein Winkelmaß von 60°. 9 Punkte

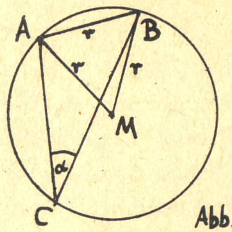

Abb. L 7; 4

Folglich ist das gleichschenklige Dreieck Δ BMA gleichwinklig und damit gleichseitig; also ist $\overline{AB} = r$.